فصلنامه علمی - پژوهشی فرماندهی و کنترل، سال پنجم، شماره چهار، زمستان ۱۴۰۰

ارائه معماری نوین شبکه‌های دفاعی گسترده مستحکم در برابر حملات هدفمند

محمدمهدی عمادی کوچک[۱]، بیژن ساعدی[۲]، مهدی نجف‌زاده[۳]، حمید محسنی[۴]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۸/۱۹ **تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۲۴**

چکیده

سیستم‌های ارتباطی غالباً در معرض انواع خرابی‌های تصادفی و حملات هدفمند قرار دارند. در خرابی‌هایی از نوع تصادفی، گره‌ها (پیوندها) با احتمال یکسانی دچار خرابی شده و از شبکه حذف می شوند. اما در حملات سیستماتیک، گره‌هایی که بیشترین اهمیت را (برای مثال درجه، نزدیکی، بینیت) دارند اول از همه مورد حمله واقع می‌شوند. استحکام در قبال اشکالات و خرابی‌ها و نیز برخورد مناسب با حملات و اشکالات یکی از ملزومات اساسی در اغلب شبکه‌ها و سیستم‌های ارتباطی امروزی به شمار می‌رود. بدین ترتیب، لازم است که سیستم‌های ارتباطی، اطمینان‌پذیری، دسترس‌پذیری و استحکام بالایی را در برابر خرابی‌ها، ا شکالات و حملات از خود ن شان دهند چرا که ممکن ا ست خود به عنوان زیر ساختی حیاتی برای ب سیاری از شبکه‌های ارتباطی مورد استفاده قرار بگیرند. تحقیقات انجام شده نشان می‌دهد که شبکه‌های پیچیده موجود، که از ساختار مستقل از مقیاس پیروی می‌کنند، در برابر حملات هدفمند نسبت به حملات تصادفی آسیب‌پذیرتر هستند.

در این مقاله ا ستحکام گراف‌های هانوی و خانواده سرپینسکی و آپولونین را همراه با معرفی مجموعه‌ای از مهم‌ترین معیارهای ا ستحکام مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. مشارکت اصلی در مطالعه حاضر این است که با کمک این معیارها بتوانیم اطمینان‌پذیری و آسیب‌پذیری این همبندی‌های کاربردی را در برابر حملات هدفمند آزموده و انواع روش‌های ساخت آن‌ها را از منظر ایمنی و استحکام برای ارتباطات میان موجودیت‌ها مطالعه نماییم. تعداد و نوع اشکالات هیچ محدودیتی را به بررسی‌های انجام شده تحمیل نمی‌کند و تلاش براین بوده تا برای حملات هدفمند الگوهای متنوعی را مورد آزمون قرار دهیم. با این همه، معیارهای مورد استفاده محدود به شبکه‌های فوق نبوده و قادرند تا برای انواع مختلفی از اشکالات و نیز طیف گسترده‌ای از شبکه‌ها مورد استفاده واقع شوند. در ادامه، یک معماری نوین شبکه‌های دفاعی با بررسی تاب آوری آنها در مقابل حملات هدفمند، چگونگی تغییرات این شبکه‌ها در مقابل حملات هدف‌دار و معیارهای ارزیابی استحکام این شبکه‌ها پرداخته می‌شود. نتایج حاصل شده نشان می‌دهد که شبکه‌های دفاعی گسترده با الهام از همبندی‌های توصیف شده توانسته بحران ایجاد شده را مدیریت کند و اتصال‌پذیری خود را به خوبی حفظ کند.

واژگان کلیدی: شبکه‌های پیچیده، حملات هدفمند و بومی سازی شده، بهبود تاب‌آوری، معیارهای استحکام، شبکه‌های دفاعی.

[۱] دانشجوی دکترا دانشگاه علوم و تحقیقات (نویسنده مسئول) m.m.emadi@srbiau.ac.ir

[۲] هیئت علمی دانشگاه پدافند هوایی خاتم الانبیا (ص)

[۳] هیئت علمی دانشگاه پدافند هوایی خاتم الانبیا (ص)

[۴] دانشجوی دکترا (مدرس دانشگاه پدافند هوایی خاتم الانبیاء (ص)) mohseny.ha@gmail.com

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

۱. مقدمه

امروزه به منظور بررسی مشکلات و چالش‌های موجود در جهان پیرامون، استفاده از انتزاع و خلاصه‌سازی بهترین روش خواهد بود. انتزاع به معنای ساده‌سازی امور مهم و گسترده در مفهومی قابل درک و البته اندازهای قابل بررسی، بهترین گزینه برای جلوگیری از سردرگمی در مطالعات و طبقه‌بندی مناسب اطلاعات حجیم می‌باشد. شبکه‌های پیچیده در واقع شکل انتزاعی از جهان پیرامون ما هستند، جهانی شامل نهادها و اعضایی که به فراخور کاربردهایشان با یکدیگر در ارتباطند، این می‌تواند ساده‌ترین تعریف برای شبکه‌های پیچیده باشد، شبکه‌هایی که از بزرگترین چالش‌ها تا کوچک ترین مسائل را در غالب راس‌ها و ارتباطات آنها نمایش می‌دهند. این شبکه‌ها به سادگی از بزرگترین شبکه‌های قدرت تا کوچکترین شبکه‌های اجتماعی را با خصوصیات و ویژگی‌های قابل بررسی، به نمایش می‌گذارند. از طریق تبدیل چالش‌های پیرامون به شکل انتزاعی شبکه‌های پیچیده بسیاری مسائل و ابهامات در علوم مختلف زیستی، اجتماعی، اقتصادی و همانند این‌ها قابل بررسی خواهند بود. بهترین روش برای نمایش شبکه‌های پیچیده ترسیم آنها در غالب گراف‌هاست، که با کمک ویژگی‌ها و خصوصیات قابل توجه گراف می‌توان نقاط در معرض خطر را شناسایی و قدرت اطمینان‌پذیری و استحکام شبکه‌های مختلف را محک زد. استحکام به معنی توانایی یک شبکه در ادامه عملکرد خود زمانی است که یک بخش از اجزای اصلی آن دچار خرابی تصادفی یا حمله هدفمند می‌شود. بررسی این امر به طور مستقیم می‌تواند روی کارایی هر فرایند در حال اجرا در شبکه اثر بگذارد[۱].

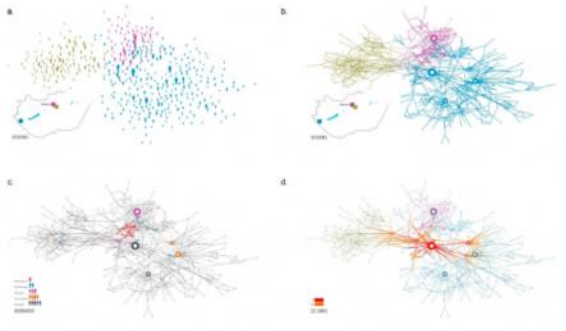
در این مقاله استحکام شبکه‌ها در برابر استراتژی‌های حمله مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرند.

بخش دوم با هدف معرفی شبکه‌های پیچیده و اجتماعی، به تاریخچه، دسته‌بندی‌ها، مدل‌ها و تعاریف مربوط به اینگونه شبکه‌ها اشاره شده است. بخش سوم به معرفی پروتکل‌های حمله و معیارهای استحکام پرداخته می‌شود. در بخش چهارم نیز به معرفی شبکه‌های پیچیده جدید ایجاد شده پرداخته شده است و با الگوریتم رشد هر گراف و روابط حاکم بر آنها و همچنین ویژگی‌هایشان را بیان می‌کنیم. در نهایت در بخش پنجم نتایج به دست آمده از این شبکه‌ها را به نمایش می‌گذاریم و در بخش ششم نیز یک نتیجه‌گیری کلی از تمامی کارهای انجام شده در این مقاله ارائه می‌کنیم. علاوه بر این شبیه‌سازهایی که به کمک آنها می‌توان به مفاهیم استحکام و تاب‌آوری پی برد، پرداخته شده است.

۲. شبکه‌های پیچیده

شبکه‌ای شامل مجموعه‌ای از رئوس و یال‌ها با خصوصیات توپولوژیکی پراهمیت، که نه کاملا تصادفی محسوب می‌شود و نه می‌توان آن را کاملا منظم شرح داد. شبکه‌های پیچیده در حال حاضر در بسیاری از زمینه های علوم مورد مطالعه قرار می‌گیرند. بدون شک بسیاری از سامانه‌های طبیعی می‌توانند توسط مدل‌هایی از شبکه‌های پیچیده شرح داده شوند، که ساختار آنها تشکیل شده از تعدادی گره یا رئوس متصل به وسیله پیوندها یا لبه‌ها است. نمونه‌های متعددی برای شبکه‌های پیچیده موجود است. اینترنت شبکه‌ای از مسیریاب‌ها یا دامنه‌ها است. شبکه جهانی وب، شبکه‌ای از وبسایت‌ها است. مغز شبکه‌ای از نورون-ها است. یک سازمان شبکه‌ای از مردم است. اقتصاد جهانی شبکه‌ای از اقتصاد ملی است که خود اقتصاد ملی شبکه‌ای از بازارها است و خود بازارها شبکه‌ای از تعامل تولیدکنندگان و مصرف‌کنندگان است. وب‌های مواد غذایی و مسیرهای سوخت و ساز، رابطه بین کلمات در یک زبان، مباحث در یک مکالمه و حتی استراتژی‌های حل یک مسئله ریاضی تمام آنها می‌توانند توسط شبکه‌ها نشان داده شوند. علاوه بر اینها بعضی خرابی‌ها توسط شبکه‌های اجتماعی انتقال پیدا می‌کنند و گاهی ویروس‌های کامپیوتری در اینترنت گسترش پیدا می‌کنند. انرژی از طریق شرکت‌های حمل و نقل توزیع می‌شود و بسیاری از سامانه‌های فیزیکی مانند شبکه‌های قدرت نمونه‌هایی از شبکه‌های پیچیده هستند. (شکل۱) نمونه‌هایی از شبکه‌های پیچیده را نمایش می‌دهد[۲].

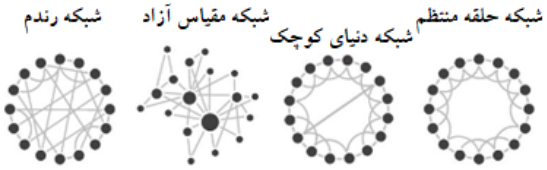
[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]



شکل۱. نمونه‌ای از شبکه‌های پیچیده

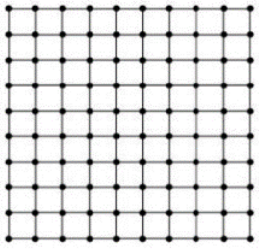
۲-۱. دسته‌بندی شبکه‌ها

شبکه‌های پیچیده در چهار کلاس شبکه‌های منظم، تصادفی، دنیای کوچک، مقیاس‌آزاد دسته‌بندی می‌شوند که در (شکل۲) نشان داده شده است[۱۷].



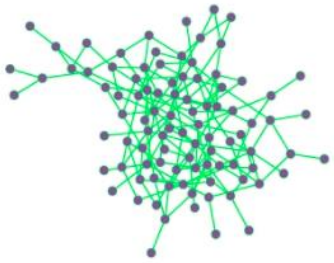
شکل۲. دسته‌بندی شبکه‌ها

- **شبکه‌های منظم**[1]: این شبکه‌ها منظم نامیده می‌شوند، زیرا گره‌ها در آنها با درجه یکسان هستند. این شبکه‌ها که در مقابل شبکه‌های تصادفی قرار گرفته‌اند، به شدت مرتب شده‌اند. شبکه‌ای است که در آن هر گره درجه‌ای یکسان دارد. به معنای دیگر تعداد همسایه‌های گره‌ها باهم برابر است. ضریب خوشه‌بندی بالا و میانگین طول مسیر بالا از ویژگی‌های چنین شبکه‌ای به شمار می‌رود. در (شکل۳) یک مربع توری شکل منظمی را از چنین شبکه‌هایی به نمایش گذاشته است[٤].



شکل۳. شبکه منظم

- **شبکه‌های تصادفی**[2]: بهترین مثال این شبکه‌ها شبکه خاص اردوش-رنی[3] در (شکل٤) است. این شبکه‌ها با گراف‌هایی مدل می‌شوند. یال‌های بین هر جفت گره در این گراف‌ها با احتمال $P(0 \le P < 1)$ به گراف اضافه می‌شود. در این شبکه‌ها میانگین طول مسیر و ضریب خوشه‌بندی پایین است. برای این شبکه‌ها توزیع درجه معمولا نرمال است[٤].



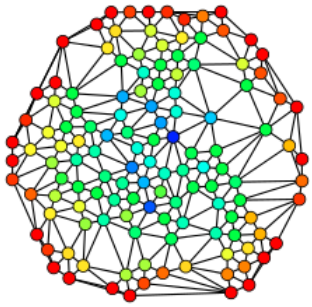
شکل٤. شبکه تصادفی

- **شبکه‌های دنیای کوچک**[4]: این شبکه‌ها بیانگر دسته‌ای از گراف‌ها هستند که در آن تعداد گره‌های همسایه کم است و تعداد معدودی گره که همسایه گره‌ای دیگر هستند خود با یکدیگر همسایه هستند که این ویژگی باعث کوتاه بودن مسیر بین گره‌های شبکه است. در چنین شبکه‌ای مشاهده می‌شود که با افزایش گره‌ها فاصله (L) بین گره‌های تصادفی با لگاریتم گره‌های موجود در شبکه نسبت مستقیم دارد هرچند که ضریب خوشه‌بندی بالا است. یکی از بهترین مدل‌ها برای نمایش چنین شبکه‌هایی شبکه واتس استروگاتس است که علاوه بر داشتن خواص دنیای کوچک، خوشه‌بندی خوبی هم داراست. پس پدیده دنیای کوچک در تئوری شبکه‌های پیچیده یک نوع گراف است که در آن اکثر گره‌ها همسایه یکدیگر نمی‌باشند ولی اکثر گره‌ها با تعداد کمی گام (معمولا به طور متوسط شش گام) قابل دسترس از سایر گره‌ها هستند. در حقیقت یک شبکه از نوع دنیای کوچک، شبکه‌ای است که فاصله میان دو گره‌ای که به صورت تصادفی در این گراف انتخاب می‌شوند، متناسب با لگاریتم تعداد گره‌ها در شبکه است. در تعریف دیگر میانگین گام‌های اتصال دو گره در شبکه‌ها، ٦ گام توصیف شده

[1] Lattice Networks
[2] Random Networks
[3] Erdos-Renyi
[4] Small World Networks

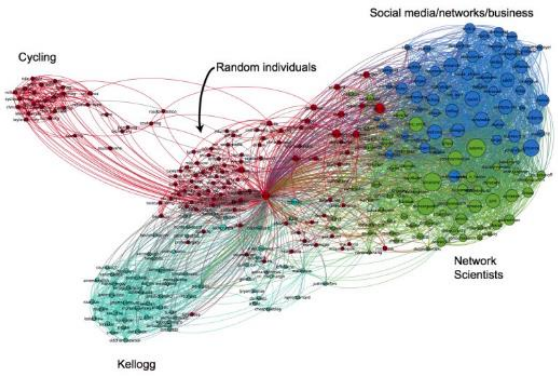
[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

است[۱۷,٤]. نمونه‌ای از این شبکه را در (شکل ۵) به تصویر کشیده شده است.



شکل۵. شبکه دنیای کوچک

- **شبکه‌های مقیاس‌آزاد**[1]: یکی دیگر از اکتشافات قابل توجه در شبکه‌های پیچیده که اخیرا در شبکه‌های مقیاس بزرگ مشاهده شده، شبکه‌های مستقل از مقیاس است، که در آنها توزیع اتصال با قانون توانی، مستقل از مقیاس شبکه صورت می‌گیرد. تفاوت شبکه مستقل از مقیاس با شبکه نمایی در این است که این شبکه‌ها در طبیعت ناهمگن هستند. در این شبکه‌ها با حذف تصادفی گره‌ها، آسیبی به شبکه وارد نشده و باز ساختار شبکه به صورت مقیاس‌آزاد خواهد بود. در این شبکه‌ها تعداد کمی گره با درجه بسیار زیاد وجود دارد که به آنها قطب (هاب) گفته می‌شود. با حذف هدقمند قطب‌ها می‌توان به سرعت شبکه را از هم گسیخته کرد. شبکه‌های اجتماعی از نوع شبکه‌های مقیاس‌آزاد می‌باشند که در (شکل٦) نمونه‌ای از این شبکه به نمایش گذاشته شده است[۱۸,٤].



شکل٦. شبکه مقیاس‌آزاد

به طور کلی شبکه‌های مستقل از مقیاس بر اساس نظریه باراباس و آلبرت، دو ساز و کار بینشان برقرار است.

- **رشد:** شبکه‌های مستقل از مقیاس همیشه در حال افزودن رأس‌ها و یال‌های جدیدند.
- **پیوست ترجیحی:** رأس‌های جدید معمولا به رأس‌های قدیمی‌ای متصل می‌شوند که درجه‌ی بیشتری دارند. به عبارت دیگر در شبکه‌های مستقل از مقیاس قوی‌ها قوی‌تر می‌شوند.

۳. استحکام شبکه در برابر حملات هدفمند

توانایی سیستم در نگهداری و حفظ سطوح راندمان حتی با حضور گره‌های مهاجم یا حملات هدف‌مند و اشکالات تصادفی موجود در شبکه را تاب‌آوری یا استحکام شبکه‌های پیچیده گویند. هر قدر یک شبکه تاب‌آوری بیشتری در برابر این نوع از حملات داشته باشد به همان اندازه نیز سیستم مزبور مستحکم‌تر خواهد بود. در ادامه روش‌های حمله به شبکه و معیارهای استحکام را نیز معرفی خواهیم کرد[۱۹].

۳-۱. پروتکل‌های حمله

در این مقاله تمرکز خود را روی حمله هدفمند بر روی شبکه‌های بدون جهت و بدون وزن با ویژگی مقیاس آزاد قرار داده‌ایم. معیار حمله مرکزیت‌های درجه، میانی و نزدیکی است که در ادامه به معرفی آنها می‌پردازیم[۲۰].

یکی از معیارهای مهم برای تحلیل شبکه‌ها این است که تصمیم بگیریم آیا رأسی مهم‌تر از سایر رئوس وجود دارد یا خیر؟ اهمیت رأس به این بستگی دارد که کدام گراف مدل‌سازی شده است. برای مثال، هنگام استفاده از شبکه‌هایی که نشانگر روابط بین افراد هستند، یک رأس با درجه زیاد نشانگر یک فرد با نفوذ است. با وجود این در یک شبکه ارتباطی، اهمیت رأس توسط تعداد کوتاه‌ترین مسیرهای عضو مشخص می‌شود، در این حالت اهمیت رأس نشانگر تراکم بار مربوط به پردازش و ارسال پیام‌ها است. در تحلیل شبکه، مفهوم اهمیت را مرکزیت می‌نامیم. مرکزیت یک معیار کمی است که در آشکارسازی اهمیت یک گره کمک می‌کند. شبکه‌های پیچیده‌ی مختلف، کاربردهای متفاوتی دارند. برحسب کاربردهای شبکه‌ها و جریان‌های داده‌ای

[1] Scale Free Networks

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

که در آنها جاری می‌شود، تعریف‌های مختلفی از مرکزیت مناسب این شبکه‌ها خواهد بود. می‌توان شبکه‌های مختلف را از نظر نحوه‌ی انتقال شی یا جریان داده و نوع مسیری که در این جریان داده اهمیت دارد طبقه‌بندی نمود. شبکه‌ها به خودی خود معنایی ندارند و جریان‌ها به شبکه‌ها معنی می‌بخشند. معیارهای مرکزیت به دو دسته‌ی معیارهای محلی و معیارهای سراسری تقسیم می‌شوند[۵].

معیارهای محلی، معیارهایی هستند که تنها به ساختار شبکه در همسایگی یک گره مربوط می‌شوند. معیارهای سراسری معیارهایی هستند که به ساختار کلی شبکه وابسته هستند. گره‌ها با مرکزیت زیاد، گره‌هایی مهمی محسوب می‌شوند و نقش زیادی در کارکرد درست شبکه‌ی پیچیده بازی می‌کنند. همین امر باعث می‌شود که در واقع گره‌هایی با مرکزیت زیاد، گره‌هایی آسیب‌پذیر محسوب شوند[۵].

3-1-۱. مرکزیت درجه

به طور کلی در این معیار مرکزیت هر چقدر درجه یک گره بیشتر باشد، آن گره از اهمیت بیشتری برخوردار خواهد بود. در گراف‌های جهت‌دار نیز هر چقدر درجه ورودی و خروجی یک گره بیشتر باشد، آن گره حائز اهمیت‌تر خواهد بود. در حملات هدفمند به شبکه‌ها مبتنی بر این روش، گره‌های با اهمیت‌تر در معرض حذف (حمله) قرار خواهد گرفت. علاوه براین، این معیار که نشان می‌دهد تا چه میزان یک رأس به مرکز گراف نزدیک است، برای این منظور حداکثر فاصله آن تا همه رأس‌های دیگر را در نظر می‌گیرد. به طور شهودی، رأس زمانی مرکز گراف است که فاصله آن از سایر رئوس حداقل باشد. به کمک این معیار می‌توان مشخص کرد که آیا عملکردهای ویژه در شبکه به صورت بهینه قرار گرفته‌اند یا خیر[۲۱].

۳-۱-۲. مرکزیت نزدیکی

این معیار مرکزیت می‌تواند حداکثر فاصله را تا سایر گره‌ها در شبکه اندازه‌گیری کند. در برخی حالات لازم است بدانیم که یک گره چقدر به سایر گره‌ها نزدیک است. به عبارت دیگر باید تمام مسافت‌ها را از یک گره تا گره دیگر در نظر بگیریم. در این حالت، به سادگی می توانیم مسافت کل هر گره را تا گره دیگر در نظر بگیریم. پس این معیار، میزان مرکزیت را که بر اساس فاصله تا هر رأس دیگر گراف اندازه‌گیری می‌شود، در نظر می‌گیرد. هر چه مقدار آن بالاتر باشد، آن رأس به هر رأس دیگر نزدیکتر است. به بیان ساده‌تر نزدیکی معیاری از فاصله‌های یک گره از بقیه گره‌های شبکه است که توسط فرمول زیر محاسبه می‌گردد. در فرمول (۱)، $d(i,j)$ اندازه کوتاه‌ترین مسیر بین دو گره i و j است[۲۱].

$$C(i)=\sum_{j\neq i}\frac{1}{d(i,j)} \qquad (۱)$$

به بیان دیگر این معیار مرکزیت، گره‌ای که به سایر گره‌ها نزدیک‌تر باشد از اهمیت بیشتری برخوردار است. منظور از نزدیک بودن این است که فاصله کمتری داشته باشد. در گراف‌های چند مولفه‌ای برای هر مولفه به صورت مجزا میزان مرکزیت از نوع نزدیکی محاسبه می‌شود. در حملات هدفمند به شبکه‌ها مبتنی بر این روش، گره‌های با اهمیت‌تر در معرض حذف (حمله) قرار خواهد گرفت. رابطه بالا به بیان نزدیکی راس i می‌پردازد. حال اگر بخواهیم نزدیکی کل گراف را به دست آوریم از رابطه (۲) استفاده خواهیم کرد.

$$C=\sum_{i}C(i) \qquad (۲)$$

۳-۱-۳. مرکزیت بینیتی

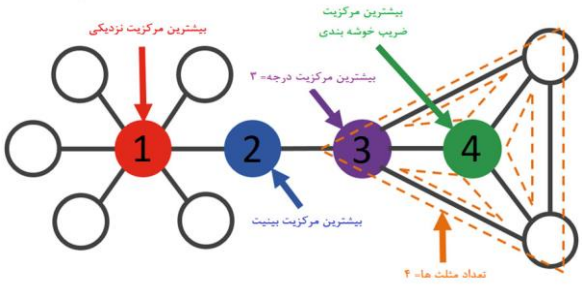
در این معیار مرکزیت، گره‌ای که بر سر کوتاه‌ترین مسیر تعداد زیادی از جفت گره‌ها در گراف باشد، با اهمیت‌تر خواهد بود. در حملات هدفمند به شبکه‌ها مبتنی بر این روش، گره‌های با اهمیت‌تر در معرض حذف (حمله) قرار خواهد گرفت. میانی بودن معیاری برای میزان اهمیت یک گره در گراف‌هایی است که از نوع انتقال داده کوتاهترین مسیر استفاده می‌کنند. میزان میانی بودن یک گره تعداد کوتاهترین مسیرهایی است که از طریق این گره بین گره‌های دیگر گراف وجود دارد. این معیار مهم، میزان مرکزیت رأس v را با احتساب کسری از کوتاهترین مسیر که ما را قطع می‌کند می‌سنجد. هر چه چنین مسیرهایی بیشتر باشند، راس v با اهمیت‌تر خواهد بود. تعریف بینیت برای گره v به فرم رابطه (۳) محاسبه می‌گردد.

$$C_B(v)=\sum_{w\neq w'\in V}\frac{\sigma_{ww'}(v)}{\sigma_{ww'}} \qquad (۳)$$

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

در این رابطه فوق $\sigma_{ww'}$ تعداد کوتاهترین مسیرهایی است که بین دو گره w و w' قرار دارند و $\sigma_{ww'}(v)$ تعداد کوتاهترین مسیرهایی است که بین دو گره w و w' است که از v می‌گذرد. همچنین مرکزیت بینیتی برای یال‌ها نیز تعریف می‌شود که بیانگر تعداد کوتاهترین مسیرهاییست که از یال می‌گذرند[۲۱].

برای درک بهتر این معیارها، (شکل۷) سه معیار مرکزیت گراف را نیز به نمایش می‌گذارد. با مشاهده این شکل تمام مفاهیم بالا قابل فهم خواهد بود[۳].



شکل۷. انواع مرکزیت

۳-2. معیارهای استحکام

در این مقاله از معیارهای مختلفی برای ارزیابی استحکام شبکه‌های پیچیده استفاده شده است که در این قسمت به معرفی این معیارها می‌پردازیم.

۳-۲-۱. ضریب خوشه‌بندی[1]

ضریب خوشه بندی، درجه‌ای است که میزان اتصالات همسایه‌های یک گره داده شده به یکدیگر را مشخص می‌کند. برای هر گره i با درجه k_i ضریب خوشه‌بندی بصورت رابطه (٤) تعریف می‌شود:

$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i-1)} \qquad (۴)$$

که L_i تا نشان‌دهنده تعداد یال‌های بین k_i همسایه‌ی گره i می‌باشد. نکته اینکه C_i بین ۰ و ۱ می‌باشد.

- $C_i = 0$ اگر هیچکدام از همسایه‌های گره i به یکدیگر اتصالی نداشته باشند.
- $C_i = 1$ اگر همسایه‌های گره i یک گراف کامل را شکل دهند. یعنی همه به یکدیگر وصل شوند.
- C_i احتمالی است که دو همسایه یک گره به یکدیگر وصل می‌شوند. در نتیجه $C = 0.5$ به این معنی است که به احتمال ۵۰٪ دو گره همسایه یک گره به هم متصل هستند.

به طور خلاصه، C_i چگالی اتصال محلی شبکه را اندازه می‌گیرد. هرچه همسایه‌های گره i بطور چگال‌تر متصل شوند، ضریب خوشه‌بندی محلی آن بالاتر می‌باشد. (شکل۸) ضریب خوشه‌بندی شبکه‌های متفاوت را نشان می‌دهد.



شکل۸ $C_i = 0$ **(شبکه سمت چپ)،** $C_i = \frac{1}{3}$ **(شبکه وسط)،** $C_i = \frac{3}{3} = 1$ **(شبکه سمت راست)**

درجه خوشه‌بندی یک شبکه کامل میانگین ضریب خوشه‌بندی همه گره‌های C_i برای $i = 1,\ldots,N$ می‌باشد و آن را با $\langle C \rangle$ در رابطه (۵) نشان می‌دهیم.

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i \qquad (۵)$$

از لحاظ احتمالات <**C**> احتمالی است که دو همسایه‌ی یک گره انتخاب شده بصورت تصادفی به یکدیگر متصل هستند[٤].

۳-۲-۲. هم‌تیپی و ناهمتیپی درجه

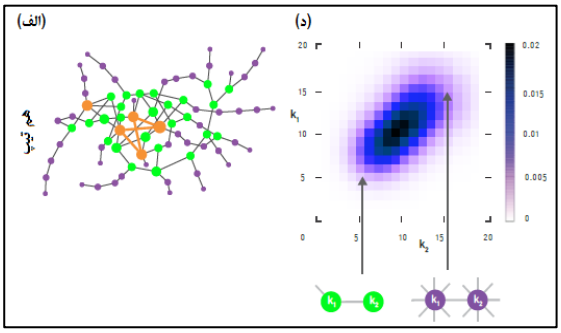
آیا گره‌های با درجه بالا ترجیح می‌دهند که با سایر گره‌های دارای درجه بالا مرتبط شوند؟ یا ترجیح می‌دهند که با گره‌های با درجه پایین‌تر مرتبط شوند؟ انتظار داریم هاب‌ها فقط به علت اینکه یال زیادی دارند به هم وصل شوند. در بعضی شبکه‌ها این اتفاق می‌افتد و در بعضی خیر. این مساله در (شکل۹) نشان داده شده است که نشان‌دهنده سه شبکه با رشته درجات مشابه ولی هم‌بندی‌های مختلف می‌باشد[۲۲].

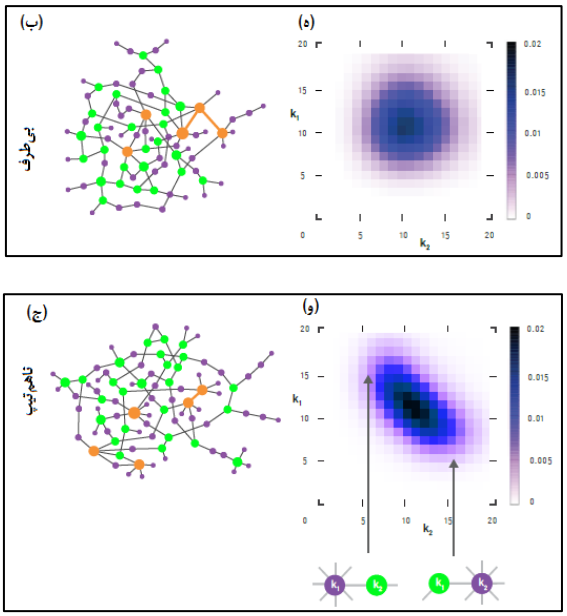
[1] Clustering Coefficient

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

- **شبکه بی طرف**[1]: (شکل ۹ب) شبکه‌ای را نشان می‌دهد که سیم بندی آن تصادفی است. ما به این شبکه بی‌طرف می-گوییم، به این معنی که تعداد یال‌های بین هاب‌ها با شانس مطابقت دارد.
- **شبکه هم‌تیپ**[2]: شبکه (شکل ۹ب) دقیقا همان رشته درجه (شکل ۹الف) را دارد. البته هاب‌های (شکل ۹ الف) تمایل به اتصال به یکدیگر را دارند و از اتصال به گره‌های درجه-کم اجتناب می‌کنند. در زمان مشابه گره‌های با درجه-کم تمایل به اتصال به سایر گره‌های با درجه-کم دارند. شبکه‌های نشان‌دهنده چنین هدفی را هم‌تیپ می‌گویند. تعیین مقادیر هم‌تیپی می‌تواند در درک صحیحی از توپولوژی شبکه مفید باشد و از این رو می‌تواند در ردیابی نقاط آسیب‌پذیر (با تحمل کمتر) کمک کند.
- **شبکه ناهم‌تیپ**[3]: در (شکل ۹ج) هاب‌ها از اتصال به یکدیگر اجتناب می‌کنند، و در عوض به گره‌های با درجه کم تمایل وصل شدن دارند. شبکه‌هایی که چنین هدفی را دنبال می‌کنند را ناهم‌تیپ می‌گویند.

مطالعات نشان می‌دهد که شبکه‌های اجتماعی، هم‌تیپ و سیستم‌های با توزیع توانی، ناهم‌تیپ هستند. بطور کلی یک شبکه همبستگی گره دارد اگر تعداد یال‌های بین گره‌های با درجه بالا و پایین بطور سیستمی از آنچه ما انتظار داریم که شانسی باشد متفاوت باشد[٤].





شکل۹. شبکه‌های بی‌طرف، هم‌تیپ، ناهمتیپ

۳-۲-۳. میانگین کوتاه‌ترین مسیر[4]

میانگین کوتاه‌ترین مسیر بین دو گره از تقسیم متوسط فاصله بین این دو گره بر فاصله بین تمام زوج گره‌ها توسط متغیر L بدست می‌آید. L اندازه موثر یک شبکه را بر اساس بیشترین جدایی بین دو زوج از گره‌های موجود در شبکه مشخص می‌کند. برای مثال در یک شبکه دوستی، L میانگین تعداد دوستان موجود در کوچکترین حلقه اتصال بین دو فرد است. یک مسئله جالب در این زمینه این است که میانگین کوتاهترین مسیر معمولا در شبکه های پیچیده واقعی نسبتا کوچک است، که مفهوم جهان کوچک زائیده همین معناست[٤].

۳-۲-٤. اتصال‌پذیری جبری[5]

محققان نشان دادند، زمانیکه از مشخصه‌های تاب‌آوری شبکه استفاده می‌کنیم اتصال‌پذیری جبری بسیار موثرتر و دقیق‌تر از متوسط درجه گره‌ها عمل می‌کند. از سوی دیگر، مطالعات نشان می‌دهد که اتصال‌پذیری جبری به استحکام گراف از طریق شبیه‌سازی گره و یال در ارتباط است. به طور کلی توپولوژی مربوط به گراف G را می‌توان با یک ماتریس مجاورت، ماتریس برخورد، ماتریس لاپلاسین یا با ماتریس لاپلاسین نرمال شده،

[1] Neutral Network
[2] Assortative Network
[3] Disassortative Network
[4] Average Geodesic Distance
[5] Algebraic Connectivity

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

نمایش داد. همچنین $\{\mu_1, \mu_2, \mathrm{L}\ , \mu_n\}$ لیستی افزایشی از مقادیر ویژه ماتریس مجاورت و $\{\lambda_1, \lambda_2, \mathrm{L}\ , \lambda_n\}$ لیستی افزایشی از مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین را نشان می‌دهد. اتصال‌پذیری جبری که با نام λ_2 مشخص می‌شود، دومین مقدار ویژه از ماتریس لاپلاسین است و به صورت رابطه (٦) تعریف می‌شود.

$$\lambda_2 \le \mathrm{n(G)} \le \mathrm{l(G)} \le \mathrm{d_{min}(G)} \qquad (۶)$$

اگر $\lambda_2 = 0$ باشد آنگاه گراف ناهمبند می‌باشد بنابراین مقدار آن همواره غیر صفر است و $0 < \lambda_2 \le N$ زمانی گراف همبند باشد[٦].

۳-۲-۵. فاصله (شکاف) طیفی[1]

فاصله طیفی نیز یک معیار شبکه است که برای اندازه‌گیری استحکام شبکه در برابر حملات هدفمند بکار رفته است. یک شکاف طیفی کوچک نشان‌دهنده تعداد زیادی نقاط است که ممکن است شبکه را زمانی که یک گره یا یک یال از بین می‌رود، تقسیم (ناهمبند) کند. شکاف طیفی را با $\Delta\mu = \mu_n - \mu_{n-1}$ نشان می‌دهند که همان اختلاف بین بزرگ‌ترین و دومین مقدار ویژه در ماتریس مجاورت است[٦].

۳-۲-٦. اتصال‌پذیری طبیعی[2]

اتصال‌پذیری طبیعی یک معیار گراف طیفی است که با استفاده از آن می‌توان مجموعه‌ای از گراف‌های ساختاری و تصادفی را برای بررسی استحکام آنها در برابر حمله به گره و یال مقایسه کرد. نتایج به دست آمده گویای این امر است که اتصال طبیعی به طور دقیق‌تر از اتصال جبری تغییر می‌کند. اتصال‌پذیری طبیعی را با $\bar{\mu}$ مشخص می‌کنند که همان مقدار ویژه اندازه‌گیری شده از ماتریس مجاورت گراف است. هر چقدر مقدار $\bar{\mu}$ بزرگتر باشد نشان‌دهنده آن است که شبکه استحکام بالاتری در برابر گره‌ها یا یال‌های حذف شده دارد. مقدار $\bar{\mu}$ به صورت رابطه (۷) محاسبه می‌شود:

$$\bar{\mu} = \ln[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{\mu_j}] \qquad (۷)$$

μ برابر j امین مقدار ویژه از ماتریس مجاورت است[٦].

۳-۲-۷. توزیع طیفی وزن‌دار[3]

مشخصه توزیع طیفی وزن‌دار (WS) معرفی شده است، تا توپولوژی اینترنت را تجزیه و تحلیل کند. در مطالعات محققان از این مشخصه برای مقایسه‌ی معیارهای استحکام در برابر شکست‌های هم‌تیپی جغرافیایی استفاده شده است و نشان می‌دهد که معیار بهتری برای ارزیابی گره‌ها و یال‌های آسیب‌پذیر جغرافیایی است. مقدار WS به صورت رابطه (۸) محاسبه می‌گردد.

$$WS(G,N) = \sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i)^N \qquad (۸)$$

در رابطه بالا λ_i بیانگر i امین مقدار ویژه ماتریس لاپلاسین است و N نیز تعداد سیکل‌های مورد ارزیابی شده است. به عنوان مثال اگر N=4 باشد تعداد مسیرهای قطع شده را نشان می‌دهد[٦].

۳-۲-۸. حساسیت شبکه[4]

حساسیت شبکه یک مشخصه طیفی گراف است که استحکام یک شبکه در برابر تغییرات توپولوژی را اندازه‌گیری می‌کند. هر چقدر مقدار حساسیت شبکه کوچک‌تر باشد استحکام شبکه نیز بالاتر خواهد رفت. علاوه بر این، این مشخصه نیز با اتصال‌پذیری جبری، میانگین درجه گره و میانگین بینیت گره مقایسه شده است. با این وجود، مطالعات نشان می‌دهد که هیچ معیاری منحصر به فرد وجود ندارد که بتواند تاب‌آوری و اتصال-پذیری شبکه را در اختیار بگیرد. این مشخصه را با علامت $\hat{\tau}$ نشان داده و همچنین فاصله تاب‌آوری کلی نیز نامیده می‌شود. مقدار $\hat{\tau}$ به شکل رابطه (۹) محاسبه می‌شود:

$$\hat{\tau} = \frac{2}{|N|-1} Trace(L^+) \qquad (۹)$$

|N| تعداد گره‌ها در یک گراف مشخص است. $Trace(L^+)$ نیز پارامتر، معکوس مور-پنروز مربوط به ماتریس لاپلاسین گراف داده شده را نشان می‌دهد[٦].

[1] Spectral Gap
[2] Natural Connectivity
[3] Weighted Spectral Distribution
[4] Network Criticality

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

۳-۲-۹. استحکام کارآمد گراف [1]

استحکام کارآمد (موثر) گراف یک معیار طیفی گراف است که استحکام شبکه را در برابر گره یا پیوند اندازه‌گیری می‌کند. این مشخصه در مقایسه با اتصال‌پذیری جبری چندین نوع شبکه تصادفی و شبکه‌های دنیای واقعی را به لحاظ میزان متصل بودن باهم مقایسه می‌کند. این مشخصه را به صورت R_G نشان می‌دهند. مقدار R_G به صورت رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود:

$$R_G = N\sum_{i=2}^{N}\frac{1}{\lambda_i} \qquad (۱۰)$$

اما نسخه نرمال شده آن، مشخصه هدایت موثر گراف نامیده می‌شود که با علامت C^+ نشان داده می‌شود و رابطه‌ی آن به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود:

$$C^+ = \frac{N-1}{R_G} \qquad (۱۱)$$

در رابطه‌ی بالا مقادیر C^+ در فاصله ۰ تا ۱ قرار می‌گیرد[٦].

۳-۲-۱۰. مجموع جریان استحکام‌ها [2]

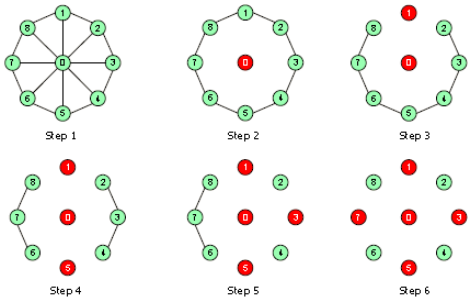
به طور کلی از یک مدل نظری گراف برای حمله به یک گراف مفروض استفاده می‌شود و نشان داده می‌شود که چگونه قدرت جریان گراف پس از حذف هر گره تغییر می‌کند. از سه معیار مرکزیت نیز برای دستیابی به این هدف استفاده می‌شود: بینیت راسی، نزدیکی راسی، درجه راسی.

بنابراین سه مدل حمله داریم که در آن گره با بیش‌ترین مرکزیت حذف می‌شود. در روش حمله بینیت راسی، بیش‌ترین تعداد کوتاه‌ترین مسیرهای عبوری را هدف قرار می‌دهد. در روش حمله نزدیکی راسی نیز مهم‌ترین نود مرکزی از نظر شمارش گام را هدف قرار می‌دهد. در نهایت در روش حمله درجه راسی، گره را با بالاترین تعداد اتصالات (بالاترین درجه) را هدف قرار می‌دهد.

شاید سوال شود که چگونه استحکام شبکه را در برابر یک حمله مبتنی بر مرکزیت قرار دهیم؟ جریان استحکام معمولا برای یک گراف مشخص به دست می‌آید. با این حال، تمایز بین گراف‌های مرتبط کاربردی نیست. برای مثال، مقدار جریان استحکام برای یک گراف کامل و یک گراف ستاره‌ای یکسان است. به عنوان یک راه‌حل، ما سه مقیاس کلی رفتاری را برای محاسبه میزان جریان استحکام یک حالت ارتجاعی شبکه در برابر حملات مبتنی بر مرکزیت معرفی می‌کنیم. مقادیر استحکام عبارتند از: مقادیر جریان استحکام در برابر حمله درجه[3] (SFRD)، مقادیر جریان استحکام در برابر حمله نزدیکی[4] (SFRC)و مقادیر جریان استحکام در برابر حمله بینیت[5] (SFRB). با استفاده از یک مثال در جدول (۱) و (شکل۱۰)، نشان می‌دهیم که چگونه استحکام شبکه، یک توپولوژی چرخشی ۹ گره‌ای را از طریق مقادیر جریان استحکام در برابر حمله بینیتی (SFRB) اندازه‌گیری کنیم[٦].

جدول۱. استحکام شبکه چرخشی

Step	Removed Nodes	FR	SFRB
1	{}	1.00	1.00
2	{0}	0.78	1.78
3	{0, 1}	0.58	2.36
4	{0, 1, 5}	0.17	2.53
5	{0, 1, 5, 3}	0.08	2.61
6	{0, 1, 5, 3, 7}	0.00	2.61



شکل(۱۰). شبکه چرخشی

۳-۲-۱۱. انرژی شبکه [6]

یکی از کاربردهای قابل توجه شیمیایی در تئوری گراف براساس ارتباط نزدیک بین مقادیر ویژه گراف و سطوح انرژی اُربیتال مولکولی($\pi-electrons$) در مولکول‌های هیدروکربن هم‌جواری بوده است. به طور مشخص، ایوان گوتمن تعریفی را از انرژی گراف ارائه کرده است.

فرض کنید $G(V,E)$ یک گراف (n,m) سادهٔ همبند و بدون‌جهت باشد و مقادیر ویژه ماتریس مجاورت گراف

[1] Effective Graph Conductance
[2] Sum Of Flow Robustness
[3] Sums of flow robustness against degree attack
[4] Sums of flow robustness against closeness attack
[5] Sums of flow robustness against betweenness attack
[6] Energy Network

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

(مولکولی) $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_n$ باشد، در این صورت انرژی گراف G به فرم رابطه (۱۲) عبارتند از:

$$E(G) = 2\sum_{j:l_j>0} l_j = \sum_{i=1}^{n} |l_i| \qquad (۱۲)$$

این رابطه ناشی از این واقعیت است که این قبیل مولکول‌های الحاقی می‌توانند با گراف‌های دوبخشی نمایش داده شوند و بدین ترتیب طیف‌های ماتریس مجاورت آن‌ها متقارن باشد. سپس این مفهوم توسط ایوان گوتمن به هر گرافی (نه ضرورتاً دوبخشی) تعمیم داده شد و او آن را به نام انرژی گراف آن طوری که امروزه همگی ما می‌شناسیم نامگذاری کرد.

همانطور که قبلا اشاره شد، مفهوم انرژی گراف برخاسته از زمینه مطالعات هیدروکربن‌های هم‌جوار با استفاده از یک متد اتصال–محکم است که در شیمی به عنوان متد مدار مولکولی هوکل **(HMO)** شناخته شده است. در این زمینه، کل انرژی مولکول هم‌جوار (در اینجا گراف G) با رابطه انرژی تعریف می‌شود. با تعمیم این مفهوم به سایر گراف‌ها، به طور کامل تمامی معانی فیزیکی و شیمیایی آن از دست رفتند. از سویی دیگر، انرژی گراف به عنوان یک گراف غیرمستقیم، اطلاعات ساختاری بسیار مهمی را درباره گراف به ما عرضه می‌دهد[۷].

۳-۲-۱۲. لاپلاسین انرژی شبکه[1]

فرض کنید $G(V,E)$ یک گراف (n,m) سادهٔ همبند و بدون‌جهت باشد و مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین گراف $\mu_1, \ldots, \mu_n$ باشد (طیف لاپلاسین گراف)، در اینصورت انرژی لاپلاسین گراف G به فرم رابطه (۱۳) عبارتست از:

$$E_L(G) = \sum_{i=1}^{n} |g_i| \qquad (۱۳)$$

که $g_i = m_i - \frac{2m}{n}$ به ازای $i = 1,2,\ldots,n$ است و مقدار ویژه کمکی نام دارد. چنانچه ماکزیمم و مینیمم درجات گراف را به ترتیب با Δ و δ نشان دهیم، کمیت $\delta \leq d \leq \Delta$ بیانگر متوسط درجه راسی گراف G یعنی $\bar{d}$ خواهد بود. نکته قابل توجه در این مورد این است که ماتریس لاپلاسین، برابر اختلاف بین ماتریس درجه و ماتریس مجاورت خواهد بود[۷].

جدول۲. ماتریس‌های مجاورت، درجه، لاپلاسین

ماتریس مجاورت	$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & Otherwise \end{cases}$
ماتریس درجه	$D_{i,j} = \begin{cases} d_{i,j} & i = j \\ 0 & Otherwise \end{cases}$
ماتریس لاپلاسین	$L = D - A = \begin{cases} d_i & i = j \\ -1 & (i,j) \in E \\ 0 & Otherwise \end{cases}$

٤. معرفی شبکه‌های پیچیده جدید

بهترین روش برای نمایش شبکه‌های پیچیده ترسیم آنها در غالب گراف‌هاست، که با کمک ویژگی‌ها و خصوصیات قابل توجه گراف می‌توان نقاط در معرض خطر را شناسایی و قدرت تاب‌آوری شبکه‌های مختلف را محک زد. در این بخش می‌خواهیم با خصوصیات و نحوه ساخت هر کدام از گراف‌های زیر آشنا شویم. در حالت کلی شبکه‌هایی که در این مقاله قرار است مورد بررسی قرار بگیرند می‌توانند توسط یک گراف بدون جهت و بدون وزن مانند $G=(V,E)$ نمایش داده شوند، طوری که V تعداد رئوس و E تعداد یال‌های شبکه است. هر یال دقیقا یک جفت گره را به یکدیگر متصل می‌کند و هر جفت گره می‌تواند حداکثر توسط یک لبه به یکدیگر اتصال یابند، در نتیجه چند اتصالی[2] مجاز نمی‌باشد. فرض می‌کنیم N تعداد گره‌ها را مشخص می‌کند (N=|v|) و k تعداد لبه‌ها باشد (k=|E|).

بدین ترتیب هر گراف G با داشتن N گره و k یال نمایش داده می‌شود و چنین گرافی را می‌توان با ماتریس مجاورت $A=(a_{ij})$ نیز نمایش داد که یک ماتریس متقارن است که هر درایه آن، یعنی a_{ij} در صورتی ۱ است که یالی جهت اتصال گره i به j وجود داشته باشد و درغیر اینصورت برابر ۰ می‌باشد. گره j را همسایه گره i می‌نامند هرگاه یالی بین دو راس i و j وجود داشته باشد. هر گذر از یک گره به همسایه آن یک گام محسوب می‌شود. گره v را ایزوله می‌نامند هر گاه هیچ همسایه‌ای نداشته

[1] Laplacian Energy Network

[2] Multiconnection

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

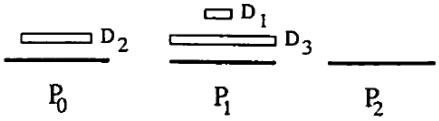
باشد. هر شبکه را در صورتی متصل[1] گویند که حداقل یک مسیر ما بین هر دو مولفه سالم آن وجود داشته باشد، در غیر اینصورت آن شبکه را منقصل[2] می‌نامند[۸]. پس از بیان توضیحات اولیه مربوط به گراف‌ها حال به بررسی گراف‌های جدید ایجاد شده در این حوزه می‌پردازیم.

1-4. گراف هانوی[3]

مطالعه درباره روابط بازگشتی، یک مثال رایج در این مورد بازی ترکیبی دنبال کننده‌ای است که به عنوان برج‌های هانوی[4] شناخته می‌شود[۲۳]. این بازی در ابتدا سه میخ و n دیسک دایره-ای به ترتیب اندازه رو به افزایش روی یک میخ قرار دارد که بزرگترین دیسک، در پایین‌ترین قسمت وجود دارد. نقطه شروع مساله برج‌های هانوی از یک حالت کامل، که در آن همه دیسک‌ها با نظم طبیعی به ترتیب از کوچکترین دیسک از بالا روی یک میخ قرار دارند آغاز می‌شود، این بدان معناست که دیسک‌ها در هر حالت قابل دسترسی بوده و به صورت منظم روی هم قرار گرفته‌اند. این دیسک‌ها باید به ترتیب، از میخی به میخ دیگر منتقل شوند به طوری که دیسک بزرگتر روی دیسک کوچکتر قرار داده نشود (قانون اصلی). مساله، تعیین تعداد حرکات لازم برای انتقال این دیسک‌ها به میخی دیگر است.

برای راحتی، ما این سه میخ را با نام‌های P_1، P_2، P_3 می‌خوانیم و دیسک‌هارا نیز از D_1 تا D_i نامگذاری می‌کنیم که دیسک D_i کوچکترین شعاع را دارد. یک پیکربندی قانونی برای قرار دادن دیسک‌ها روی سه میخ تعریف می‌کنیم تا دیسک بزرگتر روی دیسک کوچکتر قرار نگیرد. سپس به راحتی می‌توان بررسی کرد که یک تناظر یک به یک بین تمامی پیکربندی قانونی با فضای ۳ میخ و n دیسک وجود دارد که از توالی(کد) سه گانه‌ای به طول n متشکل شده است. این توالی برای کدهای تصحیح خطای k بیتی مورد استفاده قرار می‌گیرد که بر روی گراف مربوط به برج‌های هانوی تعریف می‌شود. چنین توالی‌ای به صورت $X = x_1 \dots x_n$ مطابق با آن قانون داده شده است که دیسک i ام روی میخ j ام قرار می‌گیرد، اگر $X_i = j$ باشد.

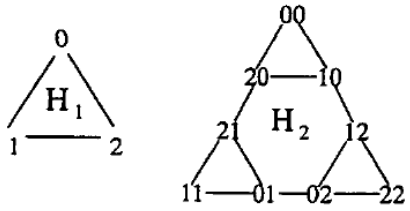
برای فهم بیشتر این موضوع توالی ۱۰۱ نشان می‌دهد که دیسک اول و دیسک سوم روی میخ P_1 و دیسک دوم روی میخ P_0 مطابق (شکل۱۱) قرار می‌گیرد.



شکل۱۱. مساله برج هانوی

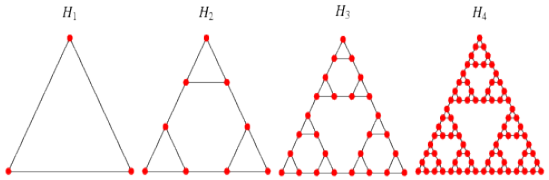
ما پیکربندی قانونی را مطابق با $x \in Z^n_3$ « پیکربندی x» می‌نامیم. این توالی(کد) که در فوق توضیح دادیم با همه دیسک‌هایش، می‌تواند ورودی‌های $i \in \{1,2,3\}$ را به خود بگیرد[۹].

به طور کلی می‌توان یک گراف را با تمام Z^n_3 به عنوان مجموعه‌ای از رئوسی ساخت که در آن دو راس x و y با یک یال به هم متصل می‌شوند اگر یک حرکت قانونی در برج هانوی وجود داشته باشد. به عبارت دیگر، با حرکات قانونی دیسک‌ها روی میخ‌ها در مساله برج هانوی، گراف هانوی نیز ساخته می‌شود. این گراف به نام برج‌های هانوی نامیده می‌شود که با H_n نمایش داده می‌شود. (شکل۱۲)، H_1 و H_2 را نشان می‌دهد.



شکل۱۲. گراف هانوی H_1, H_2

گراف مساله برج‌های هانوی و تعمیم آن‌ها تحقیقات بسیار جالبی را ایجاد کرده است. در واقع گراف H_n را می‌توان از H_{n-1} به وسیله الگوریتم بازگشتی به دست آورد. برای ساخت این گراف در هر مرحله باید به روش (شکل۱۳) عمل کنیم. (این گراف‌ها برای nهای کوچک نشان داده شده است و به همین ترتیب قابل افزایش است.)



شکل۱۳. مراحل رشد گراف هانوی

[1] Connected
[2] Disconnected
[3] Hanoi graph
[4] Hanoi Towers

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

2-4. گراف‌های سرپینسکی[1]

گراف‌های سرپینسکی در چند دهه گذشته تحت تاثیر نام‌ها و در اشکال مختلف در زمینه‌های متفاوت ریاضیات و کاربردهای آن پدیدار شده است. به طور شفاف طبقه‌بندی مربوط به این گراف‌ها و مهم‌ترین خواص این‌گونه گراف‌ها را نیز به طور خلاصه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

گراف‌ها که ساختار آن‌ها به صورت تقریبی همانند مثلث معروف سرپینسکی است، در چند دهه گذشته به شدت مورد بررسی قرار گرفته است. علاقه به این گراف‌ها از بسیاری منابع مختلف مانند بازی‌های چینی یا برج هانوی، همبندی، مطالعه اتصالات شبکه‌ها و موارد دیگری نیز نشات می‌گیرد. بنابراین تعجب‌آور نیست که نام‌های مختلفی برای یک گراف و یا همین نام را برای گراف‌های مختلف به کار گرفته شود.

در مرجع [۱۰] شباهت بین گراف‌های هانوی و دنباله‌ای از گراف‌هایی که به صورت تقریبی به مثلث سرپینسکی معروف‌اند، مطرح شده است. در آنجا گراف هانوی را با H_p^n نشان داده است که از بازی معروف برج‌های هانوی (TH) با $p=3$ میخ و n دیسک گرفته شده است. در بخش قبل با مفهوم گراف هانوی آشنا شدیم اما تعداد میخ‌ها را ثابت در نظر گرفته بودیم. اگر تعداد میخ‌ها را به صورت دنباله‌ی $P=\{0,\ldots,p-1\}$ در نظر بگیریم آنگاه رابطه‌ی تعداد رئوس گراف هانوی به فرم (۱٤) تعریف خواهد شد.

$$V(H_p^n)=p^n \qquad (۱۴)$$

با افزایش تعداد میخ‌ها همبندی گراف نیز تغییر خواهد کرد و به گراف‌های جدیدی دست میابیم که به آنها تعمیم مساله برج‌های هانوی می‌گویند.

در مرجع [۱۱]، کلوزار و ملیتینویچ نوعی از این گراف‌ها را معرفی کردند و اسم آن را برج هانوی سوییچینگ یا در حال تغییر (STH) برای p میخ و n دیسک گذاشتند. این گراف‌ها را با S_p^n نشان می‌دهند که در این پژوهش همان گراف سرپینسکی نامیده می‌شود. در گراف سرپینسکی زمانی یالی بر قرار می‌شود که یک حرکت در STH انجام شود. یعنی دیسکی از میخ i به میخ j منتقل شود.

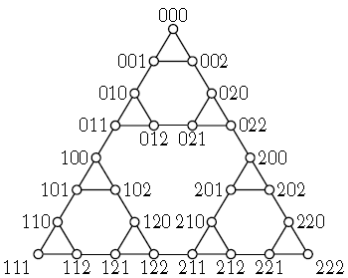
تعریف: برای $p\in N$ و $n\in N_0$ گراف سرپینسکی $\boldsymbol{S_p^n}$ به شکل رابطه (۱۵) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} &V(S_p^n)=p^n \\ &E(S_p^n)=\left\{\left\{sij^{d-1},sji^{d-1}\right\}|i,j\in P,i\neq j;d\in[n];s\in p^{n-d}\right\} \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

با توجه به تعریف تعداد رئوس و یال‌های این گراف می‌توان حالت‌های مختلف را بررسی کرد.

- در موارد بدیهی، $n=0$ و $p=1$ حالیست که گراف هیچ راسی و یالی ندارد. $S_p^1=k_p$، $S_p^n\cong k_1\cong S_1^n$ که k_p نشان‌دهنده گراف کامل شده از مرتبه p است.
- اولین حالت جالب برای این گراف‌ها زمانیست که $p=2$ باشد، که در آن $S_2^n=P_{(2^n)}$ ، گراف از مرتبه 2^n است.
- اولین نتیجه غیر بدیهی در مورد گراف‌های سرپینسکی $S_3^n=H_3^n$ است که برای هر تعداد n تعریف می‌شود. به عبارت دیگر، هر دو گراف، تقریبا تعداد رئوس برابری دارند که می‌تواند آن‌ها را با همان ظاهری یکسان اما با برچسب گذاری متفاوت نشان داد. این تفاوت اجازه یک رویکرد جایگزینی برای برج هانوی را می‌دهد.

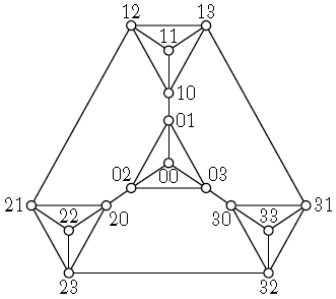
برای درک بهتر مطالب بیان شده، نمایش گراف‌های سرپینسکی $\boldsymbol{S_3^3}$ و همچنین $\boldsymbol{S_4^2}$ در (شکل۱٤ و ۱۵) نشان داده شده است.



شکل۱٤. گراف‌های سرپینسکی S_3^3

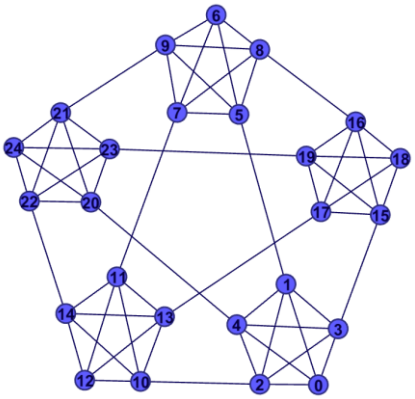
[1] Sierpinsky graphs

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]



شکل۱۵. گراف‌های سرپینسکی S_4^2

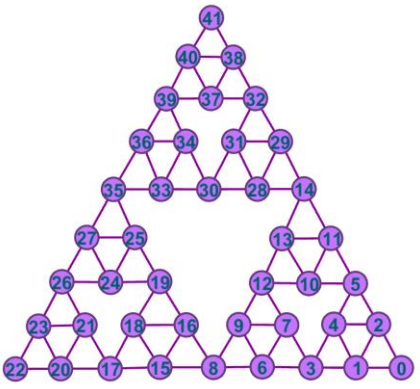
همچنین الگوریتم رشد گراف‌های سرپینسکی و تعمیم‌های آن‌ها به صورت کامل پیاده‌سازی شده است و به عنوان نمونه گراف S_5^2 در (شکل۱۶) به نمایش گذاشته می‌شود[۱۲].



شکل۱۶. گراف سرپینسکی S_5^2 ایجاد شده با نرم‌افزار گفی

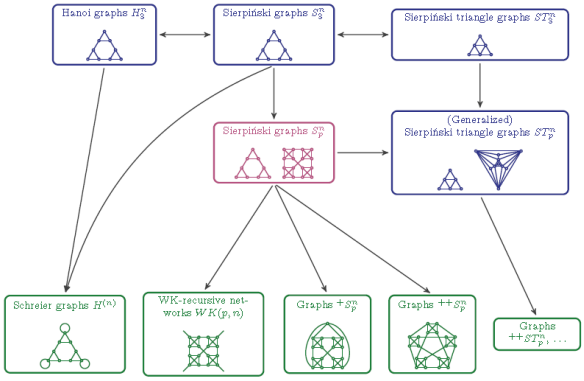
۴-۲-۱. خانواده سرپینسکی

در این بخش به چارچوب استاندارد و هماهنگ گراف‌های سرپینسکی، گراف‌های مثلث سرپینسکی و غیره می‌پردازیم که در حال حاضر همه را به عنوان گراف‌های سرپینسکی مورد خطاب قرار می‌دهیم. نکته قابل توجه و مهمی وجود دارد که برخی از پژوهشگران به گراف سرپینسکی S_3^n نام دیگری را می‌دهند. آن‌ها به این گراف، گراف سرپینسکی (gasket) گویند. نمونه‌ای از این گراف را می‌توان در (شکل۱۷) مشاهده کرد[۱۲].



شکل۱۷. گراف سرپینسکی gasket

حال مشخصاتی از گراف‌های سرپینسکی را ارائه می‌دهیم که این گراف‌ها مشتق شده یا منجربه ایجاد مثلث سرپینسکی به عنوان یکی از محبوب‌ترین این گراف‌ها می‌باشد. کلاس‌بندی اصلی (طبقه‌بندی) مربوط به گراف‌های سرپینسکی در (شکل۱۸) نشان داده شده است.



شکل۱۸. طبقه‌بندی خانواده گراف‌های سرپینسکی

این گراف‌ها با نماد $S[n,k]$ نشان داده می‌شوند که در حال حاضر با $\hat{S}_p^n = \hat{S}_k^n$ (P جایگزین k شده است) نمایش داده می‌شود و آن‌ها را گراف‌های تعمیم یافته سرپینسکی می‌نامیم.

همانطور که در (شکل۱۸) نشان داده شده است، چند راه برای سازماندهی گراف‌های سرپینسکی به گراف‌های $+S_p^n$,$++S_p^n$ ($+\hat{S}_p^n$,$++\hat{S}_p^n$) وجود دارد. دیگر خانواده‌های مشابه این گراف‌ها، شبکه‌های بازگشتی WK و گراف‌های Schreier (برای p=3) هستند که به ترتیب دارای یال‌های باز و یا حلقه‌های (طوقه‌های) اضافی هستند. همه این خانواده‌ها در دسته گراف‌های شبه سرپینسکی قرار خواهند گرفت. این خانواده‌ها مشابه گراف‌های سرپینسکی هستند، اما متناظر با آن‌ها نیستند و همچنین می‌توانند تنظیمات و ویژگی‌های مربوط به گراف‌های سرپینسکی را نیز باهم مورد مقایسه قرار داد[۱۲].

برای خلاصه کردن مباحثات فوق ، ما گراف‌های سرپینسکی را به سه شکل زیر خلاصه می‌کنیم:

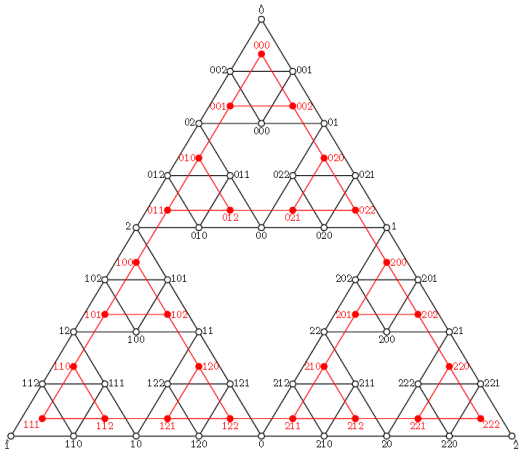
- گراف‌های سرپینسکی

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

- گراف‌های مثلث سرپینسکی (تعمیم یافته شده) [1]
- گراف‌های مشابه (شبه) سرپینسکی

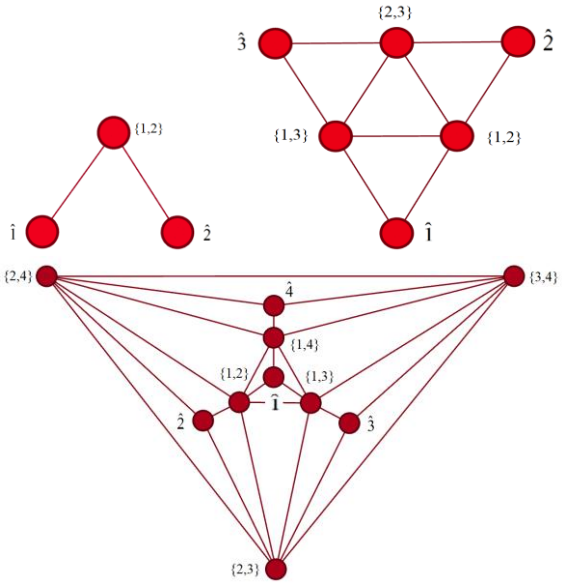
گراف سرپینسکی را در بخش قبل معرفی کردیم و با ساختار و ویژگی‌های آن آشنا شدیم. حال به معرفی گراف مثلث‌های سرپینسکی تعمیم یافته می‌پردازیم.

- **گراف‌های مثلث سرپینسکی:** یک کلاس از گراف‌هایی که اغلب اشتباه گرفته می‌شوند و همچنین گراف‌های سرپینسکی S_3^3 نامیده می‌شوند، گراف‌های مثلث سرپینسکی $\hat{S}_3^3$ هستند. زیرا زمانیکه $p=3$ است ظاهرشان به صورت تقریبی باهم یکسان است. در حقیقت، بسیاری از مقالات مربوط به این گراف‌ها، تنها از ظاهر آن‌ها استفاده می‌کنند و ویژگی‌های گراف را در نظر نمی‌گیرند. برای درک بهتر تفاوت هم‌بندی این دو گراف، (شکل۱۹) به مقایسه این دو می‌پردازد. گرافی که با رنگ مشکی مشخص شده است گراف مثلث سرپینسکی $\hat{S}_3^3$است و گرافی که با رنگ قرمز مشخص شده است گراف سرپینسکی S_3^3 نامیده می‌شود [۱۲].



شکل۱۹. مقایسه هم‌بندی دو گراف $\hat{S}_3^3, S_3^3$

پس از مشخص شدن تفاوت بین دو گراف در شکل (۱۹)، به تعریف گراف $\hat{S}_p^n$ می‌پردازیم.گراف مثلث سرپینسکی تعمیم یافته $\hat{S}_p^n$ برای $P\in N$ و $n\in N_0$ تعریف می‌شود. این گراف به کمک مجموعه‌های دو عضوی به دست می‌آید. برای مثال اگر n=2 باشد یعنی در مجموعه‌های دو عضوی، دو عدد ۱و۲ به عنوان اعضای مجموعه، مجاز می‌باشد. اگر n=3 باشد اعداد مجاز برای مجموعه‌های دو عضوی برابر ۱و۲و۳ خواهد بود و به همین ترتیب می‌توان n را افزایش داد. مجموعه‌های دو عضوی به عنوان رئوس این گراف در نظر گرفته می‌شود. هنگامی یالی بین دو راس ایجاد می‌شود که بین مجموعه‌های دو عضوی، عضوی مشترک وجود داشته باشد. اگر مجموعه‌ی دو عضوی‌ای، دارای اعضای مشترک باشند از علامت (hat) استفاده می‌شود. به عنوان مثال مجموعه دو عضوی (2,2) را با $\hat{2}$ نمایش می‌دهند. برای درک بهتر گراف $\hat{S}_p^{(n+1)}$، روند رشد این گراف را برای nهای ۲و۳و٤ در (شکل۲۰) دنبال کنید.



شکل۲۰. الگوریتم رشد گراف‌های مثلث سرپینسکی (ST)

پس از آشنایی با هم‌بندی گراف، در رابطه (۱۶) تعداد رئوس و یال‌های گراف مثلث سرپینسکی تعمیم یافته تعریف می‌شود.

$$
\begin{aligned}
V(\hat{S}_p^n) &= \hat{P}\,\mathrm{U}\left\{s\{i,j\}\,|\,s\in P^{v-1}, v\in[n], \{i,j\}\in\binom{p}{2}\right\}\\
E(\hat{S}_p^{n+1}) &= \left\{\left\{\hat{k}, k^n\{j,k\}\right\}\,|\,k\in P, j\in P\setminus\{k\}\right\}\mathrm{U}\\
&\quad \left\{\left\{s\{i,j\}, s\{i,k\}\right\}\,|\,s\in P^n, i\in P, \{j,k\}\in\binom{p\setminus\{i\}}{2}\right\}\mathrm{U}\\
&\quad \left\{\left\{ski^{n-v}\{i,j\}, s\{i,k\}\right\}\,|\,s\in P^{v-1}, v\in[n], i\in P, j,k\in p\setminus\{i\}\right\}
\end{aligned}
\qquad (۱۶)
$$

4-۲-2. شبکه ناسازگاری [2]

در این بخش به معرفی شبکه‌ی جدیدی می‌پردازیم که این شبکه نیز از خانواده گراف‌های سرپینسکی ایجاد شده‌اند. با استفاده از گراف معروف سرپینسکی (gasket)، گروهی از

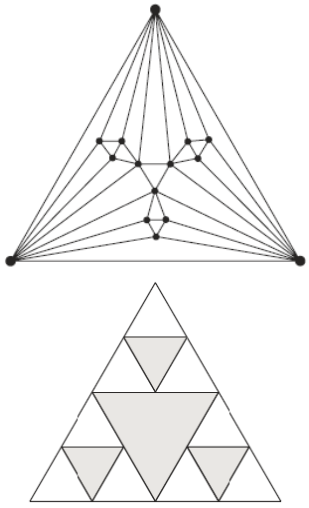
[1] Sierpinski Triangle Graph (ST(n,p))

[2] Incompatibility networks

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

شبکه‌های مهمی را معرفی می‌کنیم که به نام شبکه‌های ناسازگاری نام‌گذاری (IN) می‌شوند. این خانواده جدید از گراف‌ها، که می‌توانند قطعی یا تصادفی باشند، دارای ویژگی‌هایی هستند. گراف‌های (IN) مسطح هستند، که از توزیع درجه مقیاس‌آزاد پیروی می‌کنند. علاوه بر این، اثر جهان کوچک را نیز به نمایش می‌گذارند و ویژگی هم‌تیپی درجه را دارا می‌باشند. این شبکه‌های ناسازگار نمایش ساختاری برای پیچیدگی بسیاری از سیستم‌های واقعی در زمینه‌های زیستی و اطلاعاتی را فراهم می‌کنند[۱۳].

گراف معروف (IN) به صورت زیر ساخته شده است. پیکربندی اولیه این گراف با مثلث متساوی الاضلاع شروع می‌شودکه با S_0 نشان داده می‌شود. در مرحله بعد یک مثلث کوچک در مرکز مثلث متساوی الاضلاع ایجاد شده و رئوس دو مثلث را نظیر به نظیر متصل می‌کنیم. این مرحله با S_1 نمایش داده می‌شود. این روش را به صورت بازگشتی در سه مثلث داخلی باقیمانده برای دستیابی به S_2 تکرار کنید، که در (شکل۲۱) ظاهر این گراف نشان داده شده است. این گراف را در مرتبه نامحدود t با S_t نمایش می‌دهند. در حقیقت، این گراف‌ها را می‌توان به گراف‌های تصادفی نیز تعمیم داد که در ادامه به بیان آن می‌پردازیم.



شکل۲۱. مرحله دوم از گراف مثلث‌های سرپینسکی (پایین)، دو مرحله از گراف ناسازگاری (بالا)

از آنجا که هم‌بندی این شبکه در شکل (۲۱) نشان داده شده است، شبکه ناسازگاری (IN) وابسته به اتصالات نظیر به نظیر مثلث‌هاست. همان‌طور که قبلا بیان شد، معرفی این شبکه‌ها برای مطالعه پیچیدگی برخی از سیستم‌های واقعی، مناسب می‌باشد و ممکن است کاربردهای بیشتری را نیز داشته باشد. به عنوان مثال، اخیرا از هم‌بندی این شبکه‌ها برای بررسی پیچیدگی مربوط به جهت‌یابی شهرها استفاده شده است. از سویی دیگر، هم‌تیپی اتصالات شبکه (IN) برای مطالعه در حوزه فیزیک پلیمر نیز مفید خواهد بود[۱۳].

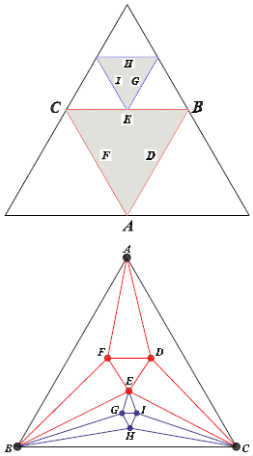
همانطور که قبلا اشاره شد شبکه (IN) می‌توانند قطعی یا تصادفی باشند که با ساختار قطعی این گراف آشنا شدیم. این شبکه‌ها دارای ویژگی‌های توپولوژیکی خوبی هستند که در برخی سیستم‌های واقعی مشاهده می‌شوند. با این حال، ساخت قطعی آن‌ها با تصادفی بودن بسیاری از سیستم‌های دنیای واقعی همخوانی ندارد. به همین علت، در این قسمت از یک ایده جالب گراف سرپینسکی (gasket) استفاده می‌کنیم و به شبکه‌ای جدید به نام شبکه سرپینسکی تصادفی[1] دست می‌یابیم. شبکه به‌دست آمده یک گراف مسطحی است که ویژگی‌های توپولوژیکی سامانه‌های واقعی را نشان می‌دهد. این ویژگی‌ها شامل: توزیع درجه بالا، اثر جهان کوچک و ساختار پیمانه‌ای است. همچنین دارای همبستگی درجه نیز می‌باشد[۱٤].

در این قسمت می‌خواهیم با الگوریتم ساخت شبکه سرپینسکی تصادفی آشنا شویم. پیکربندی اولیه این گراف با یک مثلث متساوی الاضلاع شروع می‌شودکه با W_0 نشان داده می‌شود. در مرحله بعد یک مثلث کوچک در مرکز مثلث متساوی الاضلاع ایجاد شده و رئوس دو مثلث را نظیر به نظیر متصل می‌کنیم. این مرحله با W_1 نمایش داده می‌شود (تا این مرحله ساخت این شبکه مشابه شبکه (IN) بود). سپس در مراحل بعدی یک مثلث متساوی الاضلاع به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و در داخل آن، مثلث کوچکی ایجاد شده و اتصال آن با مثلث متساوی الاضلاع صورت می‌پذیرد (تفاوت این شبکه با شبکه (IN) از این مرحله به بعد می‌باشد). برای ساخت این شبکه نیز، از شبکه معروف سرپینسکی (gesket) استفاده می‌شود که دارای مرتبه نامحدود t می‌باشد. این گراف را در مرتبه t با W_t نمایش می‌دهند.

[1] Random Sierpinski (RSN)

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

به همین ترتیب مراحل بعدی به صورت تصادفی انتخاب شده و شبکه سرپینسکی تصادفی ساخته می‌شود. در این شبکه برای ساخت W_t از مرحله قبل یعنی W_{t-1} کمک گرفته می‌شود. زمانی که یک مثلث کوچک در مرکز یکی از سه مثلث متساوی الاضلاع ایجاد می‌شود به این مثلث، مثلث فعال گویند. در مرحله t-1 یک مثلث فعال انتخاب می‌شود و اتصال آن نظیر به نظیر صورت می‌گیرد. طبیعتا در هر مثلث متساوی الاضلاعی که مثلث فعال قرار می‌گیرد مراحل بعدی را نیز در همان مثلث متساوی الاضلاع پیش می‌رویم. هم‌بندی این شبکه را نیز، (شکل۲۲) به نمایش گذاشته است.



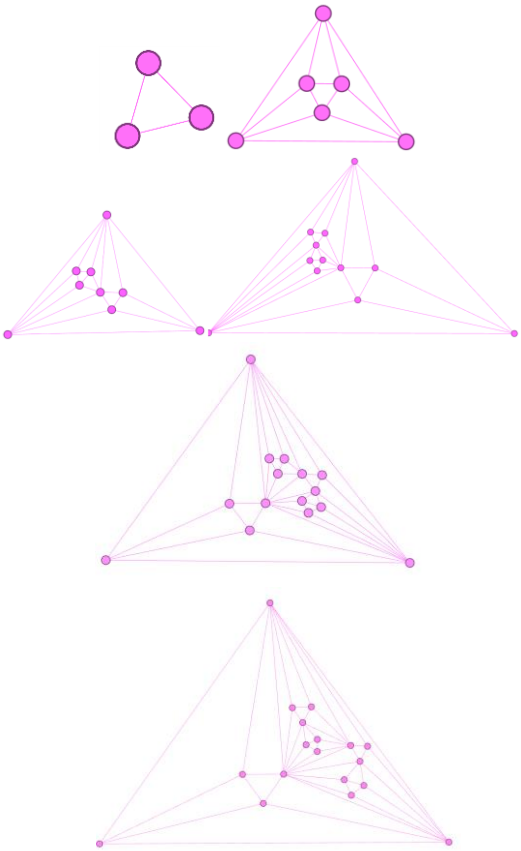
شکل۲۲. مرحله دوم شبکه gasket (بالا) و مرحله دوم شبکه RSN (پایین)

از آنجا که در هر گام تعداد گره‌ها و یال‌ها به ترتیب ۳ و ۹ برابر افزایش می‌یابد، ما به راحتی می‌توانیم بدانیم که در مرحله t، شبکه متشکل از چه تعداد گره و یال است.

$$\begin{cases} N_t = 3t+3 \\ E_t = 9t+3 \end{cases} \rightarrow E_t = 3N_t - 6$$

علاوه بر این طبق قانون اتصال، دو یال دلخواه در شبکه هرگز از هم عبور نمی‌کنند (یکدیگر را قطع نمی‌کنند). بنابراین، شبکه مورد نظر یک گراف مسطح است که مشابه نسخه قطعی می‌باشد[۱۴].

همانطور که بیان شد این ایده تصادفی در هر مرحله یک مثلث متساوی الاضلاع را انتخاب کرده و به همین ترتیب در آن الگوریتم رشد گراف را جلو می‌رود. یک ایده تصادفی دیگر برای رشد این گراف را نیز پیشنهاد می‌کنیم که منجربه ایجاد هم‌بندی جدیدی می‌شود. این ایده بدین صورت است که الگوریتم رشد گراف را به جای اینکه در یک مثلث متساوی الاضلاع قرار دهیم، در هر مرحله امکان انتخاب هر سه مثلث وجود داشته باشد. به گراف جدید به دست آمده شبکه سرپینسکی تصادفی (RSN^+) گوییم. نکته قابل توجه در این شبکه این است که هر دفعه که الگوریتم ساخت این گراف اجرا می‌شود گرافی با هم‌بندی متفاوت ارائه می‌دهد که این به عنوان یک ویژگی مهم و جالب در نظر گرفته می‌شود. برای درک بهتر این شبکه روند رشد آن را نیز در (شکل۲۳) برای تعداد گره‌های ۳ تا ۱۸ به نمایش می‌گذاریم.



شکل۲۳. مراحل الگوریتم رشد گراف RSN^+

٤-۲-۳. شبکه آپولونین[1]

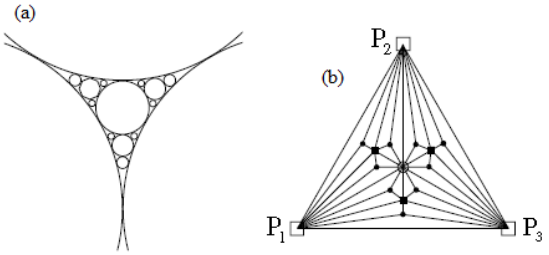
این شبکه به صورت همزمان دارای ویژگی‌های مستقل از مقیاس، دنیای کوچک، اقلیدوسی و فضای پر است. مطالعه شبکه‌ها برای درک جریان اطلاعات و انتقال اطلاعات در سیستم‌های با درجه بالا که مقیاس‌آزاد هستند، در طول سالیان

[1] Apollonian Networks

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

گذشته مفید بوده است. بسیاری از انواع این شبکه، برای تمایز و روشن کردن اثرات مختلف مربوط به خوشه‌بندی‌ها، گسترش بیماری‌های همه‌گیر، برنامه‌ریزی منطقی برای پیش‌بینی زلزله و فعالیت عصبی پیشنهاد شده. است. در میان بسیاری از مدل‌ها، توجه زیادی به مطالعه شبکه‌های بدون مقیاس شده است، یعنی شبکه‌هایی که توزیع درجه آنها قانون قدرت[1] $p(k) \propto k^{-\gamma}$ را نشان می‌دهند. در این شبکه‌ها، k نشان‌دهنده تعداد اتصالات یک گره (درجه گره) می‌باشد. یک مثال از این شبکه که در دنیای واقعی مورد استفاده قرار می‌گیرد شبکه برق می‌باشد که جریان برق فعال در این شبکه منتقل می‌شود. همچنین از این شبکه در مکان‌هایی که تراکم بالایی دارند استفاده می‌شود. به عنوان مثال در مصالح بتنی ساختمان‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. این گروه جدید از شبکه‌ها که به نام شبکه‌های آپولونین (ANs) نامیده می‌شوند، می‌توانند به صورت قطعی یا تصادفی باشند. علاوه بر این، اثر دنیای کوچک را به نمایش بگذارند و می‌توانند در یک شبکه اقلیدسی استفاده شوند[۱۵].

این شبکه برای اولین بار توسط پژوهشگری به نام آپولونیوس (ریاضیدان یونان باستان) معرفی شد. او در ابتدا ۳ دایره را باهم مماس کرد و مراکز دایره‌ها را به هم متصل کرد که به گراف مثلث شکلی رسید. سپس از مماس این ۳ دایره یک فضای خالی بینشان به وجود آمد. یک دایره درون فضای خالی به وجود آمده کشید و مرکز آن دایره را نیز به مراکز ۳ دایره دیگر متصل کرد. این گراف به دست آمده را، مرحله نخست شبکه آپولونین می‌نامند. در مراحل بعدی درون ۳ فضای خالی ایجاد می‌شود که با کشیدن دایره درون آنها و متصل کردن مراکز دایره‌ها به هم، به گراف‌های جدید دست خواهیم یافت. با تکرار این الگوریتم، گراف آپولونین رشد یافته و تعداد گره‌ها و ارتباطات آنها افزایش می‌یابد. اگر n را مرتبه این گراف در نظر بگیریم، n را می‌توان به صورت نامحدود افزایش داد ($n = 0,1,2,\mathrm{K}$). برای درک بهتر توضیحات داده شده (شکل۲٤) هم‌بندی شبکه آپولونین را نشان می‌دهد.

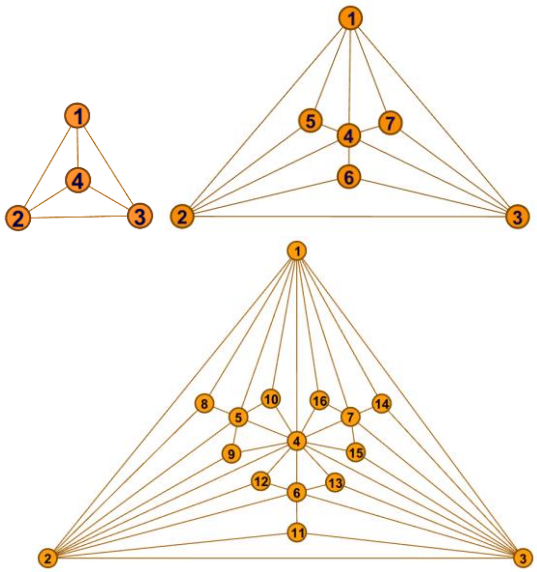


شکل۲٤. مماس کردن دایره‌های به یکدیگر (چپ)، شبکه حاصل از مماس کردن این دایره‌ها (راست)

همانطور که قبلا بیان شد این گراف می‌تواند به صورت تصادفی نیز باشد. یعنی مثل گراف ناسازگاری، به جای ایجاد ۳ دایره در فضاهای خالی، یک دایره در یک فضای خالی به صورت تصادفی ایجاد می‌شود. از گراف تصادفی آپولونین در شبکه مغز استفاده می‌شود. این شبکه بافت‌های محیط متخلخل (محیط‌های دارای خلل و فرج‌دار) مغز را می‌تواند به نمایش بگذارد. پس از آشنایی با ساختار این شبکه به بیان رابطه (۱۷) تعداد رئوس این شبکه می‌پردازیم[۲٤].

$$N_n = 3 + (3^{n+1} - 1)/2 \qquad (۱۷)$$

برای درک بهتر هم‌بندی این شبکه، (شکل۲۵) الگوریتم رشد شبکه آپولونین را نشان می‌دهد.



شکل۲۵. مراحل الگوریتم رشد گراف آپولونین

۵. شبیه سازی، نتایج و ارزیابی

[1] Power law

فصلنامهٔ علمی - پژوهشی فرماندهی و کنترل، سال پنجم، شمارهٔ چهار، زمستان ۱٤۰۰

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

یکی از چالش برانگیزترین مسائل در طراحی شبکه‌های پیچیده، اطمینان‌پذیری شبکه‌های ارتباطی می‌باشد که می‌تواند بر حسب درجهٔ اتصال‌پذیری ساختار همبندی شبکه بیان گردد. هدف از این بخش از مقاله برآورد میزان تاب‌آوری شبکه‌های پیچیده جدید (در بخش قبل معرفی شد) در برابر حملات هدفمند می‌باشد. در نتیجه شبیه‌سازی‌های انجام شده با می‌پردازیم.

1-5. مشخصات شبکه

برای اینکه بتوانیم به شبکه‌ای، حمله هدفمندی داشته باشیم که شبکه بیشترین آسیب را از این حمله متحمل شود، باید قبل از آن اطلاعات کافی‌ای از مشخصات کلی شبکه داشته باشیم. بدین منظور در این مقاله، ما در ابتدا مشخصات کلی شبکه‌های معرفی شده در بخش سوم را به صورت جداولی تهیه کرده در ادامه این مشخصات را به نمایش می‌گذاریم.

جدول (۳): مشخصات شبکه آپولونین

	آپولونین رندوم[۱]	آپولونین قطعی[۲]
تعداد گره‌ها	1024	1096
تعداد یال‌ها	3066	3282
واریانس نزدیکی	1.0.38	0.001
واریانس بینیت گره	0.014	0.0003
واریانس بینیت یال	0.004	8.547
میانگین ضریب خوشه‌بندی	0.651	0.826
حساسیت درجه	-0.206	-0.162
شعاع طیفی	96	3
قطر شبکه	192	5
میانگین کوتاه‌ترین مسیر	64.410	3.331
اتصال‌پذیری جبری	0.0002	0.254
شکاف طیفی	0.081	4.522
حساسیت شبکه	14.657	0.655
توزیع طیفی وزن‌دار	83.482	41.669
اتصال‌پذیری طبیعی	3.803	11.359
استحکام موثر گراف	0.0001	0.002
انرژی شبکه	1916.6	1680.1
لاپلاسین انرژی شبکه	2735.2	4947.6
مجموع جریان استحکام در برابر حمله بینیت	16.93	6.454
مجموع جریان استحکام در برابر حمله نزدیکی	18.80	6.454
مجموع جریان استحکام در برابر حمله درجه	131.7	6.454

جدول (٤): مشخصات شبکه هانوی

	هانوی رندوم[۳]	هانوی قطعی[٤]
تعداد گره‌ها	1023	729
تعداد یال‌ها	1533	1092
واریانس نزدیکی	9.797	7.093
واریانس بینیت گره	0.011	0.002
واریانس بینیت یال	0.008	0.001
میانگین ضریب خوشه‌بندی	0.335	0.336
حساسیت درجه	-0.001	-0.002
شعاع طیفی	100	48
قطر شبکه	199	63
میانگین کوتاه‌ترین مسیر	66.281	33.415
اتصال‌پذیری جبری	0.0001	0.001
شکاف طیفی	0.0003	0.001
حساسیت شبکه	19.634	9.748
توزیع طیفی وزن‌دار	189.7	135.3
اتصال‌پذیری طبیعی	1.334	1.335
استحکام موثر گراف	9.957	0.0002
انرژی شبکه	1515.4	1086.3
لاپلاسین انرژی شبکه	1515.7	1086.6
مجموع جریان استحکام در برابر حمله بینیت	15.582	9.006
مجموع جریان استحکام در برابر حمله نزدیکی	18.314	16.224
مجموع جریان استحکام در برابر حمله درجه	54.293	67.1

[۱] Random Apollonian Network
[۲] Deterministic Apollonian Network
[۳] Random Apollonian Network
[٤] Deterministic Apollonian Network

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

جدول (۵): مشخصات شبکه ناسازگاری

	سرپینسکی رندوم[1]	سرپینسکی قطعی[2]
تعداد گره‌ها	1023	1095
تعداد یال‌ها	3063	3279
واریانس نزدیکی	5.334	0.001
واریانس بینیت گره	0.006	0.0004
واریانس بینیت یال	0.001	1.436
میانگین ضریب خوشه‌بندی	0.557	0.573
حساسیت درجه	-0.143	-0.067
شعاع طیفی	36	4
قطر شبکه	71	7
میانگین کوتاه‌ترین مسیر	25.684	3,781
اتصال‌پذیری جبری	0.0008	0.125
شکاف طیفی	0.682	2.597
حساسیت شبکه	4.186	0.678
توزیع طیفی وزن‌دار	61.964	71.467
اتصال‌پذیری طبیعی	4.446	8.382
استحکام موثر گراف	0.0004	0.002
انرژی شبکه	1957.3	1993.7
لاپلاسین انرژی شبکه	3338.3	3576
مجموع جریان استحکام در برابر حمله بینیت	14.677	9.382
مجموع جریان استحکام در برابر حمله نزدیکی	19.704	10.395
مجموع جریان استحکام در برابر حمله درجه	52.898	10.621

جدول (٦): مشخصات شبکه خانواده سرپینسکی

	مثلث سرپینسکی	سرپینسکی Gasket
تعداد گره‌ها	1035	1095
تعداد یال‌ها	44550	2187
واریانس نزدیکی	5.359	6.877
واریانس بینیت گره	3.579	0.001
واریانس بینیت یال	3.708	0.0009
میانگین ضریب خوشه‌بندی	0.526	0.446
حساسیت درجه	-0.022	-0.001
شعاع طیفی	2	48
قطر شبکه	2	64
میانگین کوتاه‌ترین مسیر	1.916	33.75
اتصال‌پذیری جبری	38.773	0.001
شکاف طیفی	44.988	0.001
حساسیت شبکه	0.024	6.615
توزیع طیفی وزن‌دار	3.508	142.945
اتصال‌پذیری طبیعی	80.069	1..935
استحکام موثر گراف	0.079	0.0002
انرژی شبکه	3872	1868.1
لاپلاسین انرژی شبکه	7395.6	1871.9
مجموع جریان استحکام در برابر حمله بینیت	320.357	9.952
مجموع جریان استحکام در برابر حمله نزدیکی	328.612	19.137
مجموع جریان استحکام در برابر حمله درجه	345.129	198.88

2-5. نمودارهای R-values

اگر اطلاعات کافی از شبکه داشته باشیم، می‌توانیم یک حمله همه جانبه انجام داده و آسیب زیادی به شبکه وارد کنیم. در طی این حمله با استفاده از معیارهای مختلف استحکام، تاب‌آوری شبکه در برابر حملات هدف‌مند مشخص می‌شود. در این پژوهش یکی از معیارهای استحکام، مورد استفاده قرار گرفته است که در ادامه به توضیح آن می‌پردازیم.

برای سنجش استحکام شبکه، روش‌های مختلفی وجود دارد و ما مطابق با تئوری پرکولاسیون[۳]، میزان استحکام شبکه R، را با متوسط سایز بزرگ‌ترین کلاستر همبند یا مولفه همبند $S(Q)$، در طی فرآیند حذف گره‌ها از شبکه مرتبط می‌کنیم. $S(Q)$، خود تابعی از درصد حملات به شبکه است و بدین ترتیب معیار استحکام R از متوسط‌گیری بر روی درصد گره‌های واقع در بزرگترین کلاستر همبند $S(Q)$، پس از حذف Q گره از شبکه به فرم رابطه (۱۸) محاسبه می‌شود.

$$R = \frac{1}{n+1}\sum_{Q=0}^{n} S(Q) \qquad (۱۸)$$

که n تعداد گره‌های شبکه است. توجه داشته باشید که معیار استحکام فوق در واقع به نوعی با انتگرال سطح زیر منحنی $S(Q)$ در رابطه است. رابطه (۱۸) را نیز می‌توان به صورت تقریبی به فرم رابطه (۱۹) تکمیل کرد که مشکلی در صحت نتایج حاصل شده به وجود نمی‌آورد.

$$R = \frac{1}{n+1}\sum_{Q=0}^{n} S(Q) \approx \frac{1}{n}(0+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\mathrm{L}+\frac{n}{n}) \approx \frac{1}{n}(\frac{n}{2}(n+1)) \approx 0.5 \qquad (۱۹)$$

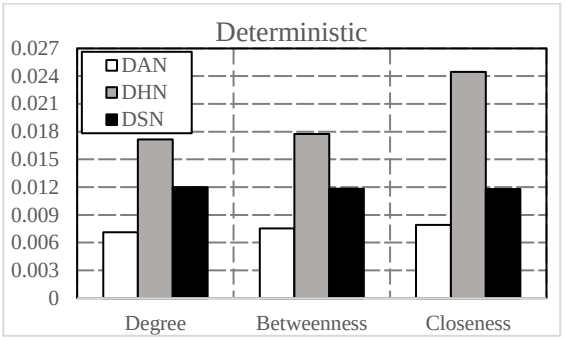
بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که معیار استحکام R مبتنی بر $S(Q)$ در بازه $[0,0.5]$ قرار دارد طوری که R=0 متناظر با شبکه‌ای مشتمل بر گره‌های ایزوله و R=0.5 متناظر با مستحکم‌ترین پیکربندی از شبکه (یک شبکه کاملا همبند در طی حمله) است. معیار استحکام R همانند پرکولاسیون می‌تواند درصد بحرانیت (نقطه شکست) شبکه را به ما ارائه دهد. بدین سیاق نمودارهای حاصل از برآورد استحکام نشان می‌دهند که پس از حذف چه تعداد گره، شبکه دچار سقوط خواهد شد که این خود معیاری متداول در تئوری پرکولاسیون است. در شکل‌های ۲۶ تا ۲۸ به ترتیب، نمودارهای استحکام R را بر حسب شبکه‌های معرفی شده در بخش پنجم به تصویر

[1] Random Apollonian Network

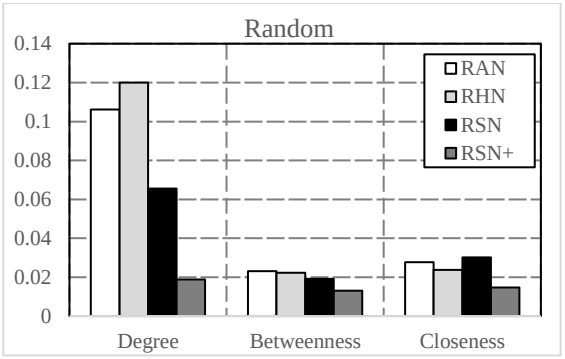
[2] Deterministic Apollonian Network

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

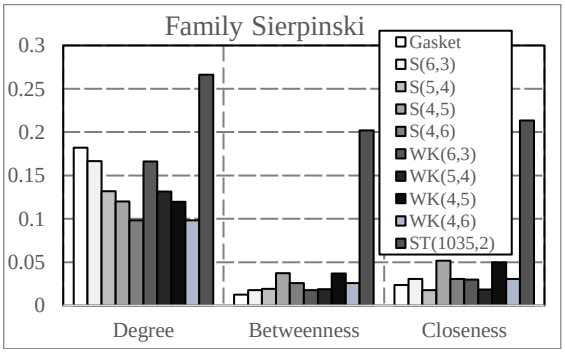
کشیده‌ایم. همان‌طور که ملاحظه می‌شود کران بالای مقدار R در حالت ایده‌آل 0.5 است که البته هیچ یک از این نمودارها نتوانسته‌اند به این مقدار دست یابند و تنها در یک مورد یعنی شبکه خانواده سرپینسکی توانسته به میزان متوسط استحکام تقریبی 0.3 نزدیک شود. این شبکه‌ها معمولا در یک خانواده قرار می‌گیرند زیرا ویژگی‌های مشترک زیادی نسبت به هم دارند[۱۶].



شکل۲۶. مقایسه استحکام R برای شبکه‌های قطعی



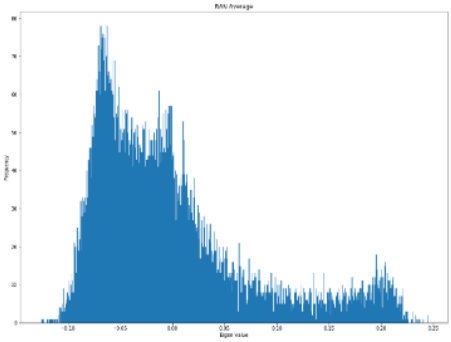
شکل۲۷. مقایسه استحکام R برای شبکه‌های تصادفی



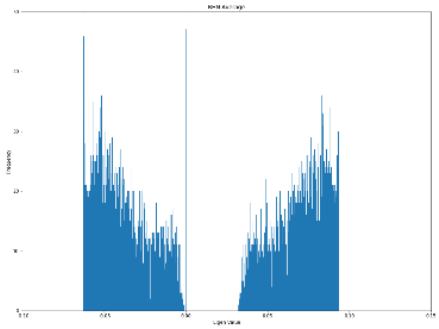
شکل۲۸. مقایسه استحکام R برای خانواده سرپینسکی

3-5. نمودارهای توزیع مقادیر ویژه

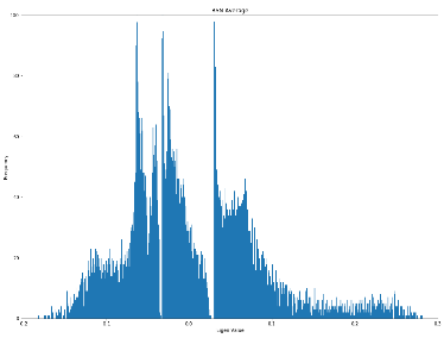
با استفاده از روابط حاکم بر این مشخصه از شبکه می‌توان مقادیر ویژه کل گراف را به دست آورد. این مشخصه تنها برای شبکه‌های تصادفی قابل محاسبه است زیرا این شبکه‌ها در هر بار که الگوریتم ساخت شبکه اجرا می‌شود یک هم‌بندی متمایز و متفاوت به نمایش می‌گذارد. به همین علت ما در این پژوهش از این خاصیت استفاده کرده و مقادیر ویژه سه شبکه‌ی تصادفی به نام‌های RAN,RHN,RSN را محاسبه کرده و در نمودار هیستوگرامی به تصویر کشیده‌ایم. نکته قابل توجه در این نمودارها این است که ما هر شبکه را ۱۰ بار اجرا کرده و ۱۰ هم‌بندی متفاوت به دست آوردیم و برای هر هم‌بندی یک مقدار ویژه محاسبه کرده و در نهایت، میانگین این ۱۰ عدد را در کنار هر نمودار قرار می‌دهیم. این اعداد نشانگر کران بالا و پایین مقادیر ویژه برای این ۱۰ شبکه است. نمودار مقادیر ویژه بر حسب فرکانس در نمودارهای هیستوگرامی زیر قابل مشاهده است.



شکل۲۹. مقادیر ویژه برای ۱۰ شبکه تصادفی آپولونین



شکل۳۰. مقادیر ویژه برای ۱۰ شبکه تصادفی هانوی



[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

شکل۳۱. مقادیر ویژه برای ۱۰ شبکه تصادفی سرپینسکی

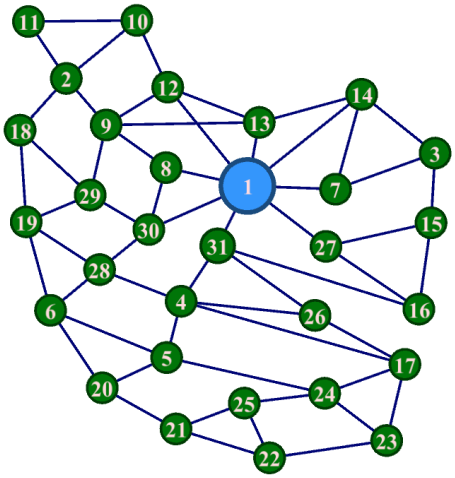
4-5. ارائه معماری نوین شبکه دفاعی گسترده

برای تحلیل و پیاده‌سازی معماری جدید شبکه دفاعی گسترده نیاز به معرفی یک سناریوی اجرایی می‌باشد. سناریوی مورد استفاده در این پژوهش نظریه پرکولاسیون معکوس است. این نظریه در شبکه‌های پیچیده برای سنجش تاب‌آوری و استحکام شبکه در برابر حملات تصادفی و یا هدفمند در شرایط بحرانی مورد استفاده قرار می‌گیرد[۲۵].

حذف یک گره تاثیر محدودی روی تمامیت شبکه دارد اما حذف چندین گره می‌تواند شبکه را به چند جزء مجزا بشکند. هرچه گره‌های بیشتری از شبکه حذف شود شانس بیشتری در خراب کردن یک شبکه وجود دارد. حال این سوال مطرح می‌شود: چه تعداد گره و یا کدامین گره‌ها را باید از شبکه حذف کرد تا شبکه به اجزاء مجزا تقسیم شود؟ به طور کلی در تمام شبکه‌ها با حذف تعداد محدودی از گره‌ها شبکه اتصال‌پذیری خود را از دست می‌دهد. این تعداد محدود برای شبکه‌های مختلف، مقادیر متفاوتی دارد به طوری که برای بعضی از شبکه‌ها با حذف تعداد کمی از گره‌ها شبکه از بین می‌رود و در برخی از شبکه‌های دیگر با حذف اکثریت گره‌ها این امر محقق می‌شود. تعداد گره‌های حذف شده می‌تواند به عوامل مختلفی چون همبندی شبکه و پارامترهای دیگر مرتبط باشد.

در سناریوی تعریف شده در این مقاله، حذف گره‌ها به صورت هدف‌مند از شبکه دفاعی گسترده صورت می‌پذیرد. معماری شبکه دفاعی گسترده برای کنترل کشور با مرکزیت اصلی تهران و امکان کنترل و مدیریت صحنه نبرد سراسری در ۳۱ استان با معیارهای شبکه دفاعی گسترده ارائه می‌گردد. کشور بر اساس مدل شبکه پیچیده سرپینسکی معرفی شده در مقاله، نسبت به جمع‌آوری اطلاعات و تصمیم گیری در بحران اقدام می‌نماید.

در مرحله اول سناریو، شبکه با مرکزیت تهران با بالاترین درجه را دارد و می‌توان به روشهای مختلف و متنوع تصمیم گیری وکنترل بحران را انجام داد. در (شکل۳۲) شبکه دفاعی گسترده ایران الهام گرفته شده از شبکه دفاعی گسترده را در این سطح به تصویر کشیده است که در این شکل گره آبی رنگ استان تهران و گره‌های سبز رنگ ۳۱ می‌باشد. جدول (۷) نیز مقادیر معیارهای استحکام را در این سطح نشان می‌دهد.

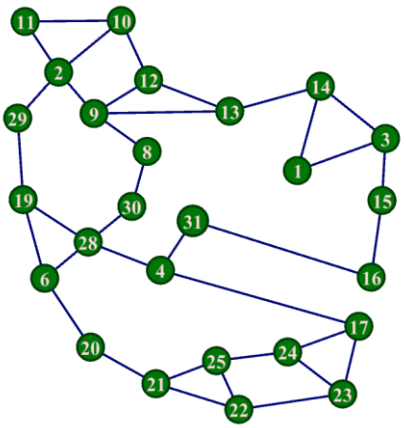


شکل۳۲. معماری شبکه دفاعی گسترده در مرحله اول

جدول۷. مقادیر معیارهای استحکام شبکه دفاعی گسترده مرحله اول

معیارهای استحکام	شبکه دفاعی
واریانس نزدیکی	۰,۰۲۰۰
واریانس بینیت راسی	۷,۴۳۸
واریانس بینیت یالی	۲,۴۵۹۹
میانگین ضریب خوشه‌بندی	۰,۶۷۲۱
قطر	۲
میانگین کوتاه‌ترین فاصله	۱,۷۶۵۱

در مرحله دوم، فرض می‌گردد که تهران با بالاترین درجه، از مدار عملیاتی خارج شده است علاوه بر آن ٤ مرکز استان دیگر نیز به صورت تصادفی در طی این حمله دچار خرابی و مشکل می‌شوند. (شکل۳۳) شبکه دفاعی گسترده الهام گرفته شده از شبکه سرپینسکی و جدول (۸) مقادیر معیارهای استحکام را در این مرحله نشان می‌دهد.



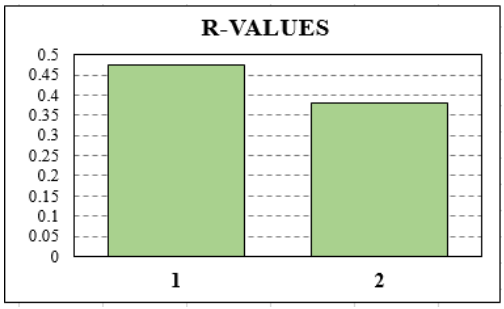
شکل۳۳. معماری شبکه دفاعی گسترده در مرحله دوم

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

جدول۸. مقادیر معیارهای استحکام شبکه دفاعی گسترده مرحله دوم

معیارهای استحکام	شبکه دفاعی
واریانس نزدیکی	۰/۰۱۴۸
واریانس بینیت راسی	۷/۰۹۳۴
واریانس بینیت یالی	۲/۱۶۲۶
میانگین ضریب خوشه‌بندی	۰/۵۳۸۷
قطر	۳
میانگین کوتاه‌ترین فاصله	۱/۰۱۰۳

همانطور که در بخش ۵-۲ نمودار استحکام شبکه‌های خانواده سرپینسکی و آپولونین را که با توجه به روابط ۱۸ و ۱۹ به دست آمده‌اند، باهم به مقایسه گذاشته شده است، در این بخش نیز این نمودار را برای سناریوی ۲ مرحله‌ای معرفی کرده و مورد بررسی و مقایسه قرار می‌دهیم. (شکل۳٤) نمودار استحکام برای ۲ مرحله پیش گفته را نشان می‌دهد. نتایج به دست آمده مبین این توضیح است که هر چه تعداد گره‌های بیشتری را از شبکه حذف شود استحکام شبکه کاهش می‌یابد. به طوری که در مرحله دوم مقدار استحکام تا حدی کاهش می‌یابد. مرحله اول که تمامی گره‌ها حضور دارند بیشترین مقدار استحکام را نشان می‌دهد. همچنین می‌توان نمودار سایز بزرگترین مولفه همبند آنها را نیز ترسیم کرد.



شکل۳٤. مقایسه استحکام R برای سناریوی دو مرحله‌ای

پس از انجام این سناریو، همانطور که مشاهده می‌شود شبکه دفاعی گسترده با الهام از شبکه پیچیده سرپینسکی توانست بحران ایجاد شده را مدیریت کند و اتصال‌پذیری خود را حفظ کند. مقادیر تاب‌آوری شبکه نیز در طی این سناریو به میزان اندکی دستخوش تغییر شد که این نشان‌دهنده تاب‌آوری این شبکه در بحران ایجاد شده است. یکی از مهم‌ترین عواملی که باعث این تغییر اندک شده است نوع همبندی شبکه سرپینسکی می‌باشد. اگر به همبندی شبکه دفاعی گسترده دقت کنید، به علت اینکه از همبندی و ویژگی‌های شبکه سرپینسکی الهام گرفته شده است، تعداد مثلث‌ها در این همبندی زیاد می‌باشد. زیاد بودن تعداد مثلث‌ها در ضریب خوشه‌بندی شبکه که یکی از معیارهای استحکام شبکه می‌باشد تاثیرگذار است. هر چه تعداد مثلث‌ها بیشتر باشد ضریب خوشه‌بندی شبکه بیشتر شده و در نتیجه استحکام همبندی شبکه نیز افزایش می‌یابد.

اگر چنانچه تمام شهرستان‌های کشور ایران که در حدود ٤۳۱ شهرستان می‌باشد را در شبکه سرپینسکی برنامه‌ریزی و در شبکه دفاعی گسترده طراحی گردد استحکام و تاب‌آوری به مراتب بیشتری را خواهیم داشت. زیرا تعداد لینک‌ها یا تعداد مسیرها، بیشتر می‌شود و در نتیجه معیارهای استحکام تقویت می‌یابد. بنابراین، معیارهای مورد استفاده محدود به شبکه‌های فوق نبوده و قادرند تا برای انواع مختلفی از اشکالات و نیز طیف گسترده‌ای از شبکه‌ها مورد استفاده واقع شوند.

٦. نتیجه‌گیری

شبکه‌های ارتباطی در حال سرویس‌دهی به همه نوع فعالیت-های انسانی هستند. خواه این کُنش‌ها در راستای انجام امور تخصصی باشد یا به منظور رفاه حال آدمی انجام شده باشد. شبکه‌های پیچیده و اجتماعی که بخش مهمی از دنیای پیرامون ما را شکل می‌دهند در عمکرد روزانه ما و سایر موجودات دخالتی تام و تمام دارند؛ با این همه، این قبیل شبکه‌ها به ندرت برای سرویس به همه این نقش‌ها در نظر گرفته شده‌اند و در برابر گسترهٔ وسیعی از چالش‌ها ازجمله حملات بدخواهانه، اشکالات نرم‌افزاری و سخت‌افزاری، اشتباهات انسانی (برای مثال پیکربندی نامناسب سخت‌افزاری و نرم‌افزاری) بسیار آسیب‌پذیر طراحی شده‌اند. در این مقاله ما با استفاده از معیارهای مختلف استحکام، تلاش کردیم تا توصیف نسبتاً سازگاری از آسیب پذیری انواع مختلفی از پیکربندی‌های مشابهی، گراف‌های هانوی و سرپینسکی و آپولونین را ارزیابی و تحلیل کنیم. نشان داده شده که یک ایزومورفیزمی بین گراف‌های هانوی و یک دنباله از گراف‌های فراهم شده از تقریب‌هایی به مثلث سرپینسکی برقرار است. گراف‌های سرپینسکی در بررسی‌های فضاهای توپولوژیکال جهانی[1] روی می‌دهند و در ضمن به عنوان زیرگراف‌های پوشایی قابل تعبیه در گراف‌های هانوی هستند. همانطور که مشاهده شد هر کدام از همبندی‌های توصیف شده نیز دارای خاصیت بازگشتی هستند.

[1] Universal topological spaces

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

در قسمت اول به بیان مقدماتی در مورد این مقاله پرداختیم. در قسمت دوم با مروی بر شبکه‌های پیچیده به درک بهتری از این شبکه‌ها رسیدیم. در قسمت سوم با انواع مدل‌های اشکال و راهبردهای حمله و معیارهای استحکام آشنا شدیم. در حملات هدف‌مند ملاحظه کردیم که اگر اطلاعات کافی از شبکه نداشته باشیم نمی‌توانیم به شبکه آسیب چندانی وارد کنیم. درنتیجه، در حملات هدف‌مند نیازمند اطلاعاتی در مورد مشخصات کلی شبکه هستیم. قسمت چهارم نیز با یک سری همبندی‌های جدید به نام‌های سرپینسکی، هانوی، آپولونین آشنا شدم و توانستیم خصوصیات و ویژگی‌های این گراف‌ها را مورد بحث و بررسی قرار دهیم. در قسمت پنجم توانستیم با انتخاب یکی از معیارهای استحکام، گراف‌های مذکور را تجزیه و تحلیل کرده و جداول و نمودارهای مرتبط با این تعاریف را پیاده‌سازی کنیم. در این بخش با مشخصات کلی شبکه‌های مذکور آشنا شدیم و توانستیم با داشتن این اطلاعات، از معیار استحکام R استفاده کنیم و میزان تاب‌آوری شبکه‌ها را به دست آوریم. همچنین توزیع مقادیر ویژه را نیز مورد بررسی قرار دادیم. در نهایت نیز با بیان یک معماری نوین شبکه‌های دفاعی گسترده الهام گرفته شده از همبندی‌های کاربردی، توانستیم استحکام یا تاب‌آوری این معماری را مورد سنجش قرار دهیم.

با انجام این مقاله در می‌یابیم که هر شبکه پیچیده دارای سطحی از استحکام است. استحکام شبکه‌ها همواره به الگوریتم رشد شبکه و نیز همبندی آن وابسته است. در نتیجه می‌توانیم با بهره‌گیری از این دو امر مهم شبکه‌ای را انتخاب کنیم که از استحکام بالاتری برخوردار باشد. بدین ترتیب، مطالعه استحکام شبکه‌های بازگشتی دیگر و مقایسه نتایج آنها با نتایج برآمده از این مقاله نیز می‌تواند بسیار سودمند باشد و به عنوان کار آتی در راستای مطالعه حاضر می‌تواند پیشنهاد گردد.

۷. مراجع

[۱] آلبرت-لازلو باراباسی (۱۳۹۷)، **کتاب آشنایی با علم شبکه‌های پیچیده**، ترجمه پیمان عاربی.

[۲] محسنی-عمادی (پاییز ۱۳۹۸)، **ارائه معماری نوین شبکه فرماندهی وکنترل مستحکم وتاب‌آور با الهام از شبکه پیچیده مقیاس‌آزاد**، یازدهمین کنفرانس ملی فرماندهی و کنترل.

[۳] محسنی-عمادی (زمستان ۱۳۹۸)، **ارائه معماری نوین شبکه فرماندهی وکنترل تاب‌آور در بحران با الهام از شبکه پیچیده واقعی مغز**، فصلنامه علمی- پژوهشی فرماندهی و کنترل، سال سوم، شماره چهار.

[4] Barabási, A.L., press (2016), **Network science**. Cambridge university.

[5] Freeman, L. C. (1978). **Centrality in social networks conceptual clarification**. Social networks, 1(3), 215-239.

[6] Alenazi, M. J., & Sterbenz, J. P. (2015, March). **Comprehensive comparison and accuracy of graph metrics in predicting network resilience**. In 2015 11th international conference on the design of reliable communication networks (DRCN) (pp. 157-164). IEEE.

[7] Udell, M. (2011). **Introduction to Spectral Graph Theory**.

[8] Crucitti, P., Latora, V., Marchiori, M., & Rapisarda, A.(2003). **Efficiency of scale-free networks: error and attack tolerance**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 320, 622-642.

[9] Hinz, A. M., & Movarraei, N. (2020). **THE HANOI GRAPH H^3_4**. Discussiones Mathematicae: Graph Theory, 40(4).

[10] Hinz, A. M., & Schief, A. (1990). **The average distance on the Sierpiński gasket**. Probability theory and related fields, 87(1), 129-138.

[11] Klavžar, S., & Milutinović, U. (1997). **Graphs S(n, k) and a variant of the Tower of Hanoi problem**. Czechoslovak Mathematical Journal, 47(1), 95-104.

[12] Hinz, A. M., Klavžar, S., & Zemljič, S. S. (2017). **A survey and classification of Sierpiński-type graphs**. Discrete Applied Mathematics, 217, 565-600.

[13] Zhang, Z., Zhou, S., Zou, T., Chen, L., & Guan, J. (2007). **Incompatibility networks as models of scale-free small-world graphs**. The European Physical Journal B, 60(2), 259-264.

[14] Zhang, Z., Zhou, S., Su, Z., Zou, T., & Guan, J. (2008). **Random Sierpinski network with scale-free small-world and modular structure**. The European Physical Journal B, 65(1), 141-147.

[15] Andrade Jr, J. S., Herrmann, H. J., Andrade, R. F., & da Silva, L. R. (2009). **Erratum: Apollonian networks: Simultaneously scale-free, small world, Euclidean, space filling, and with matching graphs**

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]

[21] Rodrigues, F. A. (2019). **Network centrality: an introduction. In A mathematical modeling approach from nonlinear dynamics to complex systems** (pp. 177-196). Springer, Cham.

[22] Shergin, V., Udovenko, S., & Chala, L. (2021). **Assortativity Properties of Barabási-Albert Networks**. In Data-Centric Business and Applications (pp. 55-66). Springer, Cham.

[23] Li, C. K., & Nelson, I. (1998). **Perfect codes on the towers of Hanoi graph**. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 57(3), 367-376.

[24] Alencar, D. S. M., Macedo-Filho, A., Alves, T. F. A., Alves, G. A., Ferreira, R. S., & Lima, F. W. S. (2021). **Modified Epidemic Diffusive Process on the Apollonian Network**. arXiv preprint arXiv:2110.14141.

[25] Li, M., Liu, R. R., Lü, L., Hu, M. B., Xu, S., & Zhang, Y. C. (2021). **Percolation on complex networks: Theory and application**. Physics Reports, 907, 1-68.

[Phys. Rev. Lett. 94, 018702 (2005)]. Physical Review Letters, 102(7), 079901.

[16] Kartun-Giles, A. P., & Bianconi, G. (2019). **Beyond the clustering coefficient: A topological analysis of node neighbourhoods in complex networks**. Chaos, Solitons & Fractals: X, 1, 100004.

[17] Bassett, Danielle S., and Edward T. Bullmore, (2017). **Small-world brain networks revisited.** The Neuroscientist 23.5: 499-516.

[18] Wang, S., Cheng, W., & Mei, G. (2019). **Efficient method for improving the spreading efficiency in small-world networks and assortative scale-free networks**. IEEE Access, 7, 46122-46134.

[19] Gao, Jianxi, Baruch Barzel, and Albert-László Barabási, (2019). Author Correction: **Universal resilience patterns in complex networks**. Nature 568.7751: E5-E5.

[20] Wang, Shuai, Jing Liu, and Xiaodong Wang, (2017). **Mitigation of attacks and errors on community structure in complex networks.** Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 2017.4: 043405.

[Downloaded from ic4i-journal.ir on 2026-11-22]